



Signals and systems

信号与系统 (人工智能研究院)

Core Knowledge summary

EDITED BY 黄奕 (LUCAS), BEIJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

此总结是期末复习产物的重新编排, 其中记录了笔者个人认为的重难点以及易混淆部分. 希望通过这个总结能够让读者更加清晰与快速的抓住内知识的精髓, 更好的理解信号与系统的核心要义.

此总结并非能够完全替代课本与课件, 其内容省略了大部分的基础知识, 默认读者已经掌握. 其定位偏向于对知识的梳理以及再巩固, 查漏补缺, 以此加深对知识的理解.

如果内容有纰漏以及错误, 可以通过邮件告知, 笔者将第一时间进行更改.

mail: 21371240@buaa.edu.cn

July 2023



Contents

1	绪论	9
1.1	信号的分类	9
1.1.1	模拟信号和数字信号	9
1.2	常用信号	10
1.3	信号的运算	10
1.3.1	复合运算	10
1.3.2	信号分解	10
1.3.3	周期信号的加(减)运算后的周期性	11
1.4	重点 summary	11
2	正交函数集以及正交分解	12
2.1	正交函数集	12
2.1.1	函数的内积	12
2.1.2	标准正交基	12
2.1.3	常见正交集合	12
2.2	正交分解	13
2.3	重点 summary	13

3	连续周期信号的傅里叶级数	14
3.1	傅里叶展开——三角函数形式	14
3.1.1	三角函数集模长与正交性	14
3.1.2	系数求解	15
3.2	傅里叶展开——一般形式	15
3.3	傅里叶展开——复指数形式 (广义三角函数形式)	16
3.4	奇偶性与级数关系	16
3.5	重点 summary	16
4	连续信号的傅里叶变换	17
4.1	非周期信号的傅里叶变换——以无穷大周期切入	17
4.2	常见信号的傅里叶变换	18
4.3	傅里叶变换的性质	19
4.4	重点 summary	20
5	拉普拉斯变换	21
5.1	单边拉氏变换	21
5.1.1	拉氏变换与傅里叶变换的区别	22
5.1.2	拉氏变换的收敛问题	22
5.2	基本函数的拉氏变换	22
5.3	拉氏变换基本性质	23
5.4	重点 summary	25
6	连续时间系统的时域分析——从时域经典法开始	26
6.1	系统	26
6.1.1	系统的定义	26
6.1.2	系统的表示	26
6.1.3	系统的分类	26
6.2	LTI 系统分析方法——时域经典法	27
6.3	重点 summary	28

7	连续时间系统的时域分析——卷积法	29
7.1	零输入响应与零状态响应	29
7.2	卷积性质	30
7.3	卷积法求解零状态响应	31
7.4	重点 summary	32
8	专题：初值带入问题以及零输入/状态的理解	33
8.1	0_- 与 0_+ 的初值究竟差在哪	33
8.2	零输入相应和零状态响应的初值条件为何如此	33
8.3	自由响应/受迫响应 && 零输入相应/零状态响应	34
9	连续时间系统的 S 域分析	35
9.1	系统函数	35
9.2	从系统函数到零状态响应——拉式逆变换	36
9.3	零极点蕴含的信息	38
9.3.1	什么是稳定系统	38
9.3.2	系统稳定性判断	38
9.4	重点 summary	38
10	离散信号与离散时间系统	39
10.1	离散信号基本知识	39
10.1.1	离散时间信号的表示	39
10.1.2	典型离散时间信号	39
10.1.3	三角函数序列的周期性	40
10.1.4	离散信号的运算和表示	40
10.2	时域分析——如何求解某时刻的函数值	40
10.2.1	迭代法	40
10.2.2	时域经典法	41
10.3	重点 summary	41

11	离散时间系统及卷积	42
11.1	离散系统中零输入/零状态响应得到求解	42
11.2	单位样值响应	43
11.3	离散系统中的卷积	44
11.3.1	卷积的计算	44
11.4	重点 summary	45
12	离散系统的 Z 变换	46
12.1	Z 变换	46
12.2	Z 变换的收敛域问题	47
12.2.1	有限长序列	47
12.2.2	无限长序列	47
12.3	常见 Z 变换	48
12.4	逆 Z 变换	49
12.4.1	长除法	49
12.4.2	部分分式展开法	49
12.5	Z 变换的性质	50
12.6	重点 summary	51
13	离散时间系统的 Z 域分析	52
13.1	Z 变换求解差分方程	52
13.2	系统函数求解	52
13.3	极点与稳定性关系	53
13.4	重点 summary	53
14	专题: Z 变换与拉氏变换的关系	54
14.1	s 平面与 z 平面的对应关系	54
14.2	s 平面与 z 平面的稳定性关系	54

15	离散时间信号分析——从连续到离散	56
15.1	离散周期信号的傅里叶级数	56
15.1.1	基函数	56
15.1.2	离散傅里叶级数变换公式	56
15.2	离散时间傅里叶变换 DTFT	57
15.3	离散连续？周期非周期？	57
15.4	重点 summary	58
16	离散傅里叶变换	59
16.1	离散傅里叶变换	59
16.1.1	周期延拓	59
16.1.2	频域离散化	60
16.1.3	变换对与整体变换流程	60
16.2	快速傅里叶变换	61
16.2.1	W_N^i 的周期性	61
16.2.2	W_N^i 的对称性	62
16.2.3	W_N^i 的可约性	62
16.2.4	基 2 时间抽取的快速傅里叶变换	62
16.2.5	快速傅里叶变换究竟加速了多少	62
16.3	重点 summary	63
17	信号的采样	64
17.1	奈奎斯特采样定律	64
17.2	最大采样频率的计算	64
17.3	重点 summary	65
18	模拟滤波器设计	66
18.1	滤什么波	66
18.2	模拟滤波器	66
18.2.1	理想滤波器的不可实现性	67
18.2.2	模拟滤波器参数	67

18.3	模拟滤波器设计——以低通滤波器为例	67
18.3.1	巴特沃斯滤波器	67
18.3.2	切比雪夫 I 型滤波器	69
18.3.3	切比雪夫 II 型滤波器	69
18.4	频率转换进行非低通滤波器的设计	70
18.5	重点 summary	70
19	数字滤波器设计	71
19.1	有限脉冲响应滤波器 (FIR)	71
19.1.1	冲激响应不变法	72
19.1.2	双线性变换法	72
19.2	无限脉冲响应滤波器 (IIR)	73
19.2.1	窗函数法	73
19.2.2	频率采样法	74
19.3	重点 summary	74
20	信号处理在音频与图像中的应用	75
20.1	音频处理之短时傅里叶变换 (STFT)	75
20.2	图像处理之二维离散傅里叶变换 (2D DFT)	76
20.3	图像压缩之离散余弦变换 (DCT)	77
20.4	重点 summary	78
	笔者的一些想法	79

1. 绪论

1.1 信号的分类

信号的分类包括:

1. 确定性信号与随机信号: 按照确定性分类
2. 连续时间信号和离散时间信号: 按照时间的连续离散性分类
3. 周期信号和非周期信号: 按照周期性分类
4. 奇信号与偶信号: 按照奇偶性分类
5. 模拟信号和数字信号

其中**模拟信号**和**数字信号**的定义易于混淆, 因此这里特别对其进行解释。

1.1.1 模拟信号和数字信号

■ **Definition 1.1.1 — 模拟信号.** 时间连续或幅值连续的信号称为模拟信号。

■ **Definition 1.1.2 — 数字信号.** 时间和幅值均离散化的信号。

在这里笔者对连续与离散的理解为: 连续代表可以任意取值, $\{0.1, 0.01, 0.001\}$ 等等, 对精度没有要求; 离散则代表取值有限制, 只能取如 $\{0.1n, 0.01n, 0.001n; n \in Z\}$ 等具有限制的
数字。

■ **Example 1.1** 判断下列信号是连续信号还是离散信号:

1. $f(t) = \sin(t)$
2. $f(t) = \sin(nT), T = 0.1, n \in Z$
3. $f(t) = \text{fun}(\sin(nT)), T = 0.1, n \in Z$, $\text{fun}()$ 定义为对函数进行 0.01 分度的四舍五入 (例如 0.134 变为 0.13; 0.125 变为 0.13)。

■

1、3 十分容易判断他们分别是连续信号与离散信号，易错点为 2。答案是 2 为模拟信号，因为其时间离散，但幅度连续。

1.2 常用信号

包括指数信号、正/余弦信号、复指数信号、单位脉冲信号、单位阶跃信号、单位冲激信号、符号函数等。这些信号对后续学习均起到至关重要的作用。其中单位冲激信号的性质值得再次强调。

Theorem 1.2.1 — 冲激函数的筛选性质. $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

Theorem 1.2.2 — 冲激函数的取样性质. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$

此外，冲激信号与阶跃信号的关系、阶跃信号与脉冲信号的关系等等大家也应心中有数。

1.3 信号的运算

包括加法与乘法、移位（时移或延时）、反转变换（反褶）、尺度变换（压缩与扩展）、复合运算、微分与积分、基本信号分解等。后续还会涉及到卷积。运算方法在此不做介绍。

1.3.1 复合运算

我们要理清信号从 $f(t)$ 到 $f(at+b)$ 的变化过程，往往其能从两方面来理解——先移位后尺度以及先尺度后位移。

1. $f(t)$ 到 $f(t+b)$ 到 $f(at+b)$
2. $f(t)$ 到 $f(at)$ 到 $f(a(t+\frac{b}{a})) = (at+b)$

1.3.2 信号分解

直流与交流分解

$$x_d = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$x_a(t) = x(t) - x_d$$

能够注意到直流分量其实是对信号求了均值。

奇偶分解

$$Ev\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$Od\{x(t)\} = x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

运用奇偶函数定义不难证明上述函数的奇偶性。

脉冲分解

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

运用到了冲激函数的性质。

其它还有虚实分解、正交分解等等。虚实分解与奇偶分解的思想是一致的，而正交分解将会在下一章介绍。

1.3.3 周期信号的加(减)运算后的周期性

Definition 1.3.1 — 周期信号. 是定义在 \mathbf{R} 上的, 每隔一定时间 T , 按相同规律重复变化的信号。即对于信号 $f(t)$, $\exists T$ 使得 $f(t+T) = f(t)$ 恒成立。

在这里给出一条并不完全正确的结论, 但基本适合大部分情况:

Theorem 1.3.1 — 周期信号的叠加. 当且仅当两个周期信号的周期之比为有理数时, 相加之和才为周期信号, 且和信号周期为两信号周期的最小公倍数。

减法同理。其特殊情况请感兴趣的同学自行上网搜索。

■ **Example 1.2** 判断下列和信号的周期性

1. $\sin(x) + \sin(2x)$, 为周期函数, 其周期为 2π ;
2. $\sin(x) + \sin(x)$, 不为周期函数.

■

1.4 重点 summary

模拟信号与数字信号

信号平移与尺度的复合运算

简单的分解

周期信号叠加的周期性

2. 正交函数集以及正交分解

2.1 正交函数集

Definition 2.1.1 — 正交函数集. 正交集是由一系列元素组成的集合内的元素是彼此正交（垂直）的

2.1.1 函数的内积

Definition 2.1.2 — 函数内积. 离散函数: $f_1 \cdot f_2 = \sum_{n=n_1}^{n_2} f_1(n)f_2(n)$

连续函数: $f_1 \cdot f_2 = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt$

当内积为 0 时则代表正交。

2.1.2 标准正交基

在正交的条件下满足自身模长为 1。当正交集中均满足元素模长为 1 时，则为标准正交集。

其它概念：完备正交集。

2.1.3 常见正交集

三角函数正交集

$$\{\sin n\omega_0 t, \cos n\omega_0 t, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, t \in (t_0, t_0 + T), T = 2\pi/\omega_0$$

复指数正交集

$$\{e^{jn\omega_0 t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, t \in (t_0, t_0 + T), T = 2\pi/\omega_0$$

以上两正交集均是后续变换的重要基础。

2.2 正交分解

在此直接给出系数公式：

$$a_i = \frac{\int_{T_1}^{T_2} f(t)f_i(t)dt}{\int_{T_1}^{T_2} f_i(t)f_i(t)dt} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} f(t)f_i(t)dt}{K_i}$$

其中 f 为现有函数， f_i 是正交集合中的元素。

这个系数的前提是在均方误差最小的情况下，推导过程并不复杂。

2.3 重点 summary

函数正交集

函数正交分解的系数求解

3. 连续周期信号的傅里叶级数

3.1 傅里叶展开——三角函数形式

考察上一讲提到的三角函数正交集，以它为基础进行计算。通过 2.2 正交分解公式进行系数求解。

3.1.1 三角函数集模长与正交性

回顾正交函数集：

$$\{\sin n\omega_0 t, \cos n\omega_0 t, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, t \in (t_0, t_0 + T), T = 2\pi/\omega_0$$

对其正交性与自身模长进行阐述：

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 \cdot \sin n\omega_0 t dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 \cdot \cos n\omega_0 t dt = 0$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 dt = T_0$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos n\omega_0 t \cdot \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos n\omega_0 t \cdot \sin m\omega_0 t dt = 0$$

上述公式说明了两件事：三角函数集合确实是正交的；除 1 的模长为 T_0 ，其它元素模长为 $\frac{T_0}{2}$ 。

3.1.2 系数求解

回顾公式：

$$a_i = \frac{\int_{T_1}^{T_2} f(t) f_i(t) dt}{\int_{T_1}^{T_2} f_i(t) f_i(t) dt} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} f(t) f_i(t) dt}{K_i}$$

将三角函数带入并进行积分求解，得到最终的系数公式：

$$a_0 = \frac{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt}{K_0} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{K_{a_n}} = \frac{2}{T_0} \int_{-x_0/2}^{x_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt}{K_{b_n}} = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

其中第一项是整体信号的直流分量——代表了均值。

最终得到信号的展开级数：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

■ **Example 3.1** 判断正误

傅里叶级数展开将连续信号分解成离散信号的和。(来自 2023 期末选择，回忆版)

■

答案是正确的。可能误区在于基信号不也是连续函数吗？，但事实上基信号不需要表示，我们只关系系数。如果把正交集想成坐标系的话，那已知信号便可以由若干个坐标系中的点构成。

3.2 傅里叶展开——一般形式

运用三角函数的性质，我们可以将三角函数合并：

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

其中 $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\varphi_n = \arctg(-b_n/a_n)$ ，分别代表幅值和相位。

再次代回原式子，能够更加简洁，且物理意义更加明显：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

3.3 傅里叶展开——复指数形式（广义三角函数形式）

在这里不加的给出公式：

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, n = (-\infty, +\infty)$$

推导过程提示：考虑三角函数与复指数的关系——**欧拉公式**。

在这里简要提一下级数能**收敛到原函数**的条件：

Theorem 3.3.1 — Dirichlet 条件的充分条件. 共三条

1. 在一个周期内，信号 $f(t)$ 绝对可积
2. 在一周期内，如果有间断点存在，则间断点的数目应是有限个
3. 在一周期内，极大值和极小值的数目应是有限个

在题目中不会对其进行考察，但如果后续学习过程中对展开产生疑问且找不到问题所在时，不妨回头看一下是否收敛。

3.4 奇偶性与级数关系

函数性质	级数特点
奇函数	仅正弦项
偶函数	仅直流和余弦项
奇谐函数	仅奇次谐波（含正弦和余弦）分量
偶谐函数	仅直流和偶次谐波（含正弦和余弦）分量

Table 3.1: 奇(谐)偶(谐)性

其中称满足 $f(t + \frac{T_0}{2}) = -f(t)$ 为奇谐函数，称满足 $f(t + \frac{T_0}{2}) = f(t)$ 为偶谐函数。

3.5 重点 summary

傅里叶级数展开公式：共三种（一般形式并不常用）。

信号性质与级数特点的对应关系。

4. 连续信号的傅里叶变换

注意到上一讲处理的信号均为周期信号，那么面对非周期信号又将如何处理？周期无限大是核心。

从离散正交集的级数到连续基函数的变换，从此将正式踏入“变换”的大门。

4.1 非周期信号的傅里叶变换——以无穷大周期切入

套用周期傅里叶级数公式：

$$\tilde{F}(n\omega_0) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right]$$

注意到积分是一个有界量，因此整体趋于 0。那么在这种条件下此物理量已经失去了意义——恒为 0。为了克服这个问题，我们将重定义**频率密度函数**作为后续研究重点。

Definition 4.1.1 — 频率密度函数. $F(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 \tilde{F}(n\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

积分上下界依旧可以理解成周期的边界，只不过非周期函数的周期是正无穷。这也是傅里叶变换对中的正变换。

进一步，让我们探究**傅里叶级数和傅里叶变换**的关联。

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} F(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

最终给出傅里叶变换对：

Definition 4.1.2 — 傅里叶变换对.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

同样应考虑收敛条件。与上一讲类似，此处不再赘述，后续变换同理应考虑收敛，但将不会再提，请读者留有一定意识。

4.2 常见信号的傅里叶变换

$f(t)$	$F(\omega)$
e^{-at}	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1
E	$j\omega$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\omega}$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

Table 4.1: 常见傅里叶变换表

注意积分方法，常用的方法是用已知函数组成未知函数，如在计算阶跃函数时，我们的方法为 $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ 。

■ Example 4.1 求以下函数的傅里叶变换

$$f(t) = \text{sgn}(t)$$

直接积分求会因为不满足绝对可积条件而得不出答案，因此采用变换

$$f_1(t) = \text{sgn}(t)e^{-a|t|} = \begin{cases} -e^{-at} & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$$

然后让 a 趋近于 0 即可得到答案。

■ Example 4.2 求以下函数的傅里叶变换

$$f(t) = u(t)$$

直接积分求会因为不满足绝对可积条件而得不出答案，因此采用变换

$$f_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

即可得到答案。

4.3 傅里叶变换的性质

1. 对称性

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \implies \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

此公式常常用于已知求未知，能够大大节省计算时间。

2. 线性性

$$\mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega)$$

得益于线性性，因此信号分解才具有意义。

3. 奇偶虚实性

Theorem 4.3.1 — 奇偶虚实性. 实偶-实偶; 实奇-虚奇

1. 若 $f(t)$ 为函数, 则 $F(\omega)$ 为实偶函数
2. 若 $f(t)$ 为实奇函数, 则 $F(\omega)$ 为虚奇函数

这个定理能够简明的描述出频谱的特征。此外其也是 **DCT**（离散余弦变换）的理论基础。

4. 尺度变换

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \xrightarrow{a=-1} \mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$$

注意外面有绝对值里面没有

时域压缩（扩展）等同于频域扩展（压缩）

5. 时移与频移

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

注意哪里有负号？很很很重要，很很很常用。

6. 时域微分与频域微分

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega) \quad \mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

很很很重要，很很很常用。

■ **Example 4.3** 请尝试用微分性质借助 $u(t)$ 求 $\delta(t)$ 的傅里叶变换。 ■

7. 时域积分与频域积分

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega = \mathcal{F}^{-1}\left[j\frac{f(t)}{t} + \pi f(0)\delta(t)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\left(j\frac{1}{t} + \pi\delta(t)\right)f(t)\right]$$

■ **Example 4.4** 请尝试用积分性质借助 $\delta(t)$ 求 $u(t)$ 的傅里叶变换。 ■

提问：积分性质中得到的 $\delta(t)$ 是怎么来的呢？

在后续变换中，会有相似性质，笔者将不会每一个都详细描述，只会对重难点以及改动的地方进行强调，所以请大家牢记傅里叶变换的性质。

4.4 重点 summary

求傅里叶变换的思想以及已知组成未知的技巧

傅里叶变换的性质是重中之重。后续的拉普拉斯变换、Z 变换等均与其有异曲同工之妙，相似度很高。

5. 拉普拉斯变换

在傅里叶变换中，存在诸多弊端，比如其对收敛条件十分严格。因此我们通过乘上衰减因子来辅助原信号收敛，得到拉普拉斯变换。同时拉普拉斯变换有更强的对信号的描述能力。

这章**十分重要**，向上承接傅里叶变换，向下与未来的线性时不变系统分析密切相关，请大家一定要牢牢掌握拉氏变换的内容。

插句题外话，拉普拉斯变换初始是用来解微分方程的有力工具，这个方法在《微分方程》这门课中也会有所讲解。而信号与系统中对一个系统的描述往往就是差分方程、微分方程，因此自然也可以用拉普拉斯变换来简化我们的计算步骤。

5.1 单边拉氏变换

直接给出拉普拉斯变换对：

Definition 5.1.1 — 拉普拉斯变换对.

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \end{cases}$$

其中 $s = \sigma + j\omega$ 。注意**单边拉氏**变换的积分是从 0 开始，更准确说其上下界是 $(0_-, +\infty)$

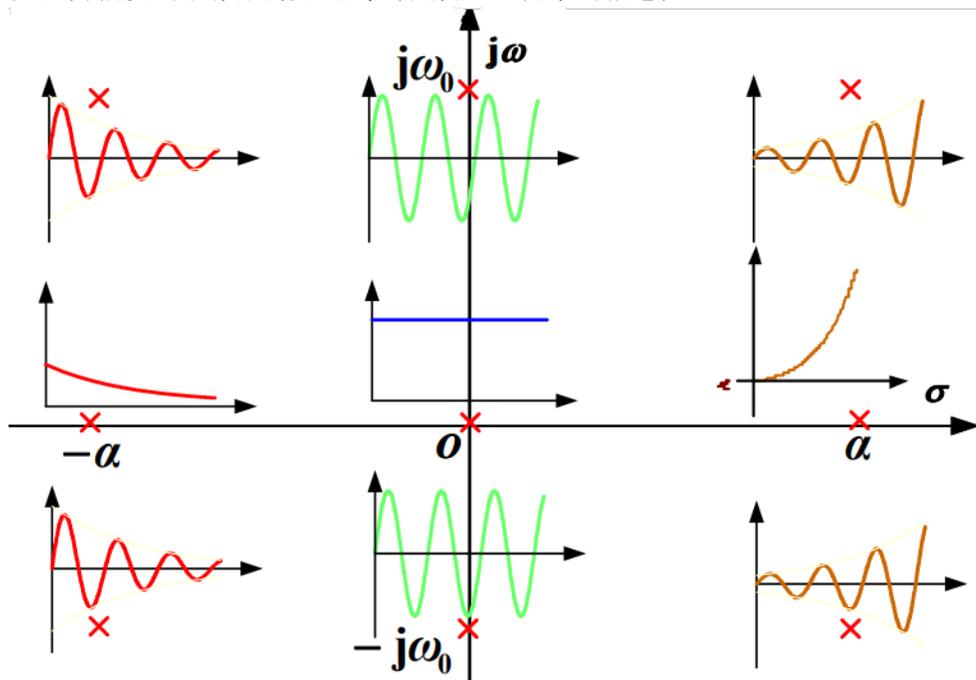
以后默认拉普拉斯变换指的就是单边拉普拉斯变换。

5.1.1 拉氏变换与傅里叶变换的区别

傅里叶变换是当 $\sigma = 0$ 时的一种特殊的拉氏变换。

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

从频域的角度上来看，傅里叶变换是一维**实数**频率信息 $\{\omega\}$ ，拉氏变换是二维**复平面**信息 $s = \{\omega, \sigma\}$ ，描述能力增强—— ω 只能描述振荡重复频率，而 s 不仅能描述振荡频率，也能反映振荡幅度的衰减或增长速率（衰减因子携带的信息）。



5.1.2 拉氏变换的收敛问题

依旧是 Dirichlet 条件。往往已知函数的增长速度不能大于指数函数，这样才可能收敛。

Definition 5.1.2 — 收敛域. 以 s 平面的视角。

若存在 σ_0 ，使得 $f(t)e^{-\sigma_0 t}$ 收敛，则对于任意一个大于 σ_0 的 σ ， $f(t)e^{-\sigma t}$ 就一定收敛。

我们称 s 平面中 $\sigma > \sigma_0$ 的部分是收敛域。

5.2 基本函数的拉氏变换

在求解时需要注意单边拉氏变换的特点——积分限从 0 开始。

■ **Example 5.1** 判断以下两个函数的拉氏变换是否相同：

$$f(t) = e^{-at}$$

$$f(t) = e^{at}u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, a > 0$$

■

答案是相同的，因为两函数在大于 0 的部分完全一致。

接下来给出常见函数的拉氏变换：

$f(t)$	$F(s)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$u(t) = e^{-0}$	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\delta(t)$	1
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Table 5.1: 常见拉氏变换表

5.3 拉氏变换基本性质

1. 线性性

2. 时移

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s) (t_0 \geq 0)$$

注意单边拉氏变换**只能右移**，因为要保证在时间小于零的部分是不具有信号的。那么右移后从 0 到 t_0 多出来的部分如何处理？ $u(t-t_0)$ 给出了答案——这部分为 0。

为了更加直观地表示，下图展示了两种右移的区别：左图只是单纯的右移，右图为拉普拉斯意义下的时移。



3. S 域平移

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$$

4. 尺度变换

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

这里 a 是没有绝对值的。究其原因，因为拉普拉斯变换是对正时间进行变换的，因此此处的 a 一定大于 0。

5. 时域微分与频域微分

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

其中 $f(0)$ 指的是 $f(0_-)$ 。这个减法在傅里叶变换中没有，注意区分。

将其进行推广得到：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0)$$

实话讲这个公式笔者认为很抽象，展开后会更加容易记忆，这里以二阶导为例，请读者体会。

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

同理得到频域的微分性质：

$$\mathcal{L}[-tf(t)] = \frac{d}{ds} F(s) \quad \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

■ **Example 5.2** 运用性质求 t^n 的拉氏变换。 ■

无论在《信号与系统》还是《微分方程》，这个公式都是重中之重，必考，必会。

6. 时域积分与频域积分

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(u)du$$

其中 $f^{-1}(0) = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ 。

请务必注意频域积分的上下界，其与时域积分、傅里叶的时频域积分均不同!!。

7. 初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

当然也有一定的条件：

- (1). $\mathcal{L}[f'(t)]$ 存在。
- (2). $F(s)$ 为**真分式**。也就是剔除了 $f(t)$ 冲激函数及其各阶导数——因为从假分式到真分式会提出常数、 s 的正次幂，而这些其实就是 $f(t)$ 冲激函数及其各阶导数的拉氏变换。

8. 终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

同样有条件——首先得**存在终值**。

存在终值的条件：

- (1). $F(s)$ 的极点位于 s 平面的**左半平面**。(默认读者已知极点与零点)。
- (2). 在 $s = 0$ 上**至多存在单极点**。

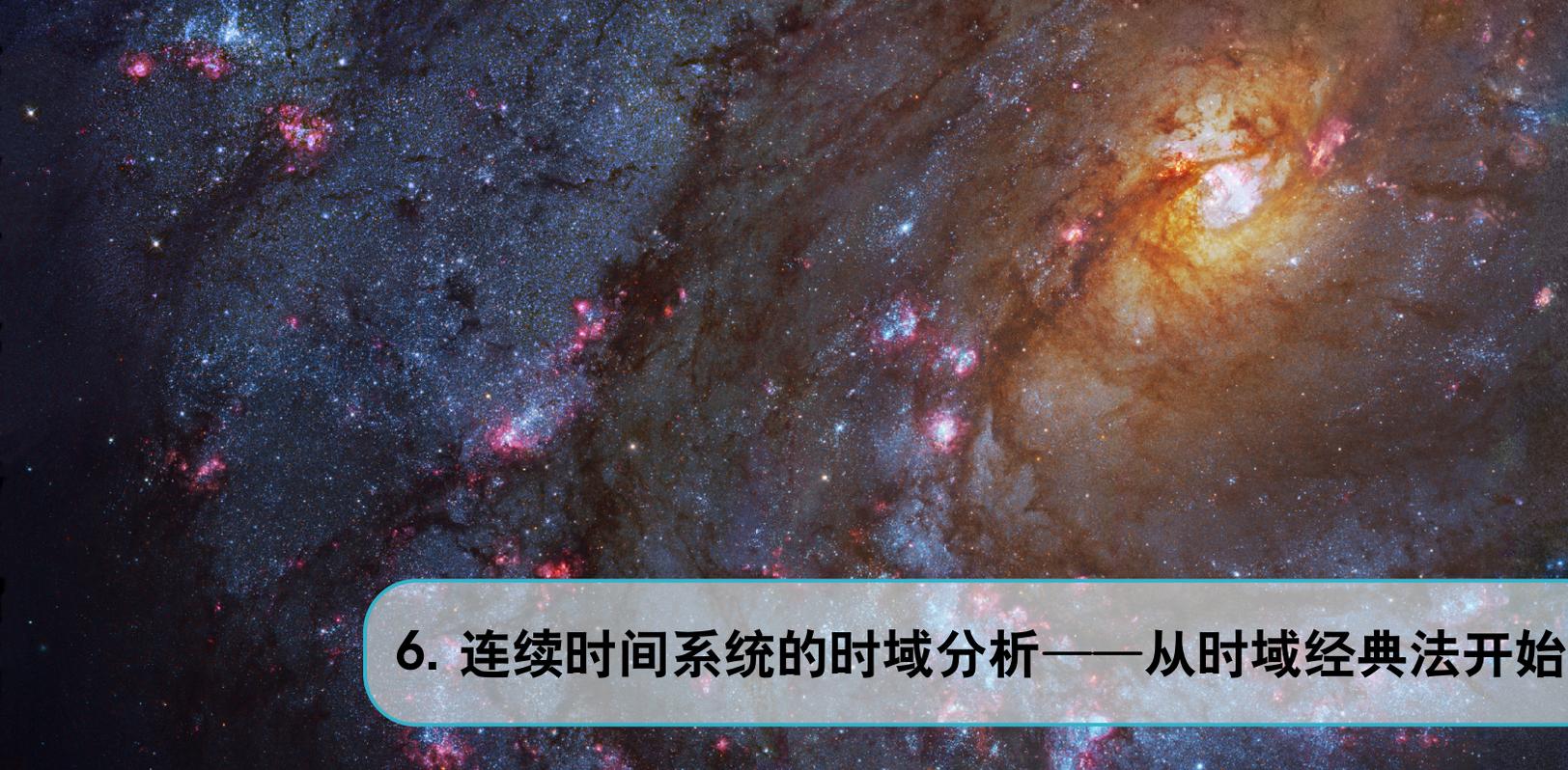
第一条或许容易理解——因为在左半面意味着整体趋势是递减的。那么第二条如何理解？考虑 $s = 0$ 单极点的情况，即为 $F(s) = \frac{k}{s}$ ，代表原函数为**常数函数**，因此终值存在。

5.4 重点 summary

拉氏变换与傅里叶变换的差别

拉氏变换 s 复平面的意义

拉氏变换的性质，特别的其比傅里叶变换多了初值定理与终值定理，注意使用条件



6. 连续时间系统的时域分析——从时域经典法开始

现在我们已经学过了傅里叶级数、傅里叶变换、拉普拉斯变换，已经掌握了有力的信号处理工具。接下来我们将理论与系统相结合，将所学的变换切实运用到“系统”中去。接下来的一切内容均会围绕系统展开，特别的，围绕**线性时不变系统 (LTI)**。

从这一讲开始，会有部分易混淆难区分的概念，我将会以个人理解来帮助大家更好的掌握。

6.1 系统

6.1.1 系统的定义

Definition 6.1.1 — 广义系统. 由若干相互作用和相互依赖的事物组合/互联而成（组件、设备、子系统、算法等互联）的具有特定功能（传输信号或对信号进行加工处理）的整体。

Definition 6.1.2 — 课程中的系统. 特指在输入信号（激励）下产生输出信号（响应）的系统。

6.1.2 系统的表示

- 代数方程、微分方程、差分方程
- 框图表示

6.1.3 系统的分类

这里主要强调三个：线性系统与非线性系统、时不变系统与时变系统、因果系统与非因果系统。

线性系统：满足**可加性**和**齐次性**的系统。

时不变系统：如该系统对输入 $x(t)$ 有输出 $y(t)$ ，则该系统对输入 $x(t-T)$ 应有输出 $y(t-T)$ 。

因果系统：现在的响应 = 现在的激励 + 以前的激励。不依靠未来的激励。

在这里推荐给大家一篇知乎文章，很清晰全面的讲述了如何判断系统线性、时不变、因果：<https://zhuanlan.zhihu.com/p/629891574>。希望大家能够掌握里面每一种类型——因为每一种都很有代表性，且思路具有相通性可以举一反三。

未来我们主要研究线性时不变系统 (LTI)。

6.2 LTI 系统分析方法——时域经典法

线性连续时间系统的时域分析，就是一个建立和求解线性微分方程的过程。

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

那么时域经典法与微分方程的解题思路是一致的 (在数学分析中也有涉及)——完全解 = 齐次解 + 特解。

齐次解 (自由响应)：微分方程、齐次方程、特征方程、特征根、写出齐次解形式。

而特解 (受迫响应) 只需看等式右边的形式即可**对应的**设出来。

激励函数 $e(t)$	响应函数 $r(t)$ 的特解形式
常数 E	常数 b
t^p	$b_1 t^p + b_2 t^{p-1} + \dots + b_p t + b_{p+1}$
e^{at}	$b e^{at}$
$\cos(\omega t)$ 或 $\sin(\omega t)$	$b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$

注意：其次解中如果带入 0 时刻的值去运算，则一定要带入 0_+ 时刻来进行计算。

至于为什么要用 0_+ ，我在后期讲完零输入响应和零状态响应后，会单独开一个专题来谈谈我对带入初值、激励函数对系统作用的理解。

■ Example 6.1 求解系统响应 $r(t)$ 表达式

$$\frac{d^2}{dt^2} r(t) + 7 \frac{d}{dt} r(t) + 6r(t) = e(t), \quad e(t) = 6 \sin(2t) \quad \frac{d}{dt} r(0_+) = r(0_+) = 0$$

解：

易求特征根为 -1、-6，其次解为 $a_1 e^{-t} + a_2 e^{-6t}$ 。

根据 $e(t)$ 设特解为 $\beta = b_1 \sin(2t) + b_2 \cos(2t)$ ，通过待定系数法带入求得 $b_1 = \frac{3}{50}, b_2 = -\frac{21}{50}$ 。

因此解为 $r(t) = a_1 e^{-t} + a_2 e^{-6t} + \frac{3}{50} \sin(2t) - \frac{21}{50} \cos(2t)$

最后带入 $\frac{d}{dt} r(0_+) = r(0_+) = 0$ ，求得 $a_1 = \frac{12}{25}, a_2 = -\frac{3}{50}$

■

如果只有 0_- 状态怎么办? 要求 0_+ 状态, 运用公式

$$r^{(k)}(0_+) = \int_{-\infty}^{0_+} r^{(k+1)}(t)dt = \int_{-\infty}^{0_-} r^{(k+1)}(t)dt + \int_0^{0_-} r^{(k+1)}(t)dt = r^{(k)}(0_-) + \int_0^{0_+} r^{(k+1)}(t)dt$$

这里用到**冲激函数匹配法**来求 $\int_0^{0_+} r^{(k+1)}(t)dt$ 跳变。

冲激函数匹配法

正规方法是匹配高阶项再匹配低阶项, 具体老师 ppt 上已经很详细了, 这里我来描述一下我的做法, 在解题过程中会更加流畅且方便——只需匹配最高项。

1. 找到等式右侧的冲激函数导数的最高项 $\delta^{(k)}(t)$ 。
2. 找到等式左侧导数的最高项 $r^{(p)}(t)$ 。
3. 设 $r^{(p)}(t) = a_{(k+1)}\delta^{(k)}(t) + a_k\delta^{(k-1)}(t) + \dots + a_1\delta(t) + a_0u(t)$ 。
4. 积分得到任意 $r^{(m)}(t), m < p$, 积分规则为 $\delta^{(k)}(t)$ 变为 $\delta^{(k-1)}(t)$, $\delta(t)$ 变 $u(t)$, $u(t)$ 变 0 。
5. 带入原式, 求解系数。
6. 运用系数求解跳变。

■ **Example 6.2** 求 0_- 到 0_+ 的跳变量

$$\frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 3\delta'(t)$$

1. 找到等式右侧的冲激函数导数的最高项 $\delta'(t)$
2. 找到等式左侧导数的最高项 $r'(t)$
3. 设 $r'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + cu(t)$
4. 积分得到 $r(t) = a\delta(t) + bu(t)$
5. 代入原式, 得 $a = 3, b = -9, c = 27$
6. $r(0_+) - r(0_-) = \int_0^{0_+} r'(t)dt = \int_0^{0_+} b\delta(t)dt = b = -9$

■

6.3 重点 summary

判断系统类别

时域经典法 (注意带入值得要求)

7. 连续时间系统的时域分析——卷积法

上一讲中我们知道了时域经典法，但是其弊端在于麻烦，要猜特解，如果特解找不对就整体都错了。为了避免这种情况，这一讲将引入卷积法，同时与学到的拉氏变换相结合，降低求解难度。

7.1 零输入响应与零状态响应

Definition 7.1.1 — 零输入响应. 系统在没有输入激励的情况下，仅仅由系统的初始状态引起的响应 $r_{zi}(t)$ ；由非零的系统状态值 $r^{(k)}(0_-)$ 决定的初始值求解待定系数。

初始条件： $r^{(k)}(0_+) = r^{(k)}(0_-)$ 。若只有 $r^{(k)}(0_+)$ 则应求解 $r^{(k)}(0_-)$ 。

Definition 7.1.2 — 零状态响应. 系统起始状态为零的条件下，仅仅由系统外加激励信号引起的响应 $r_{zs}(t)$ ；由系统状态值 $r^{(k)}(0_-)$ 为零决定的初始值求解待定系数。

初始条件： $r^{(k)}(0_-) = 0$ ，但可能有跳变，需求解 $r^{(k)}(0_+)$ 。

自由响应/受迫响应 && 零输入响应与零状态响应

$$\begin{aligned} r(t) &= r_{zi}(t) + r_{zs}(t) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{zik} e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{zsk} e^{\alpha_k t}}_{\text{零状态响应}} + \beta(t) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\beta(t)}_{\text{受迫响应}} \end{aligned}$$

而对于其解法，零输入响应是方程齐次解，零状态响应是齐次解加特解，整体过程与时域经典法一致，唯一的区别就在于带入的值不同，要牢牢记住初始条件！

7.2 卷积性质

卷积的计算方法为：

$$f(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

希望读者首先从定义的角度理解什么是卷积，最好借助图来加深理解。关于题目巩固，这里给出一个网址供读者自行学习练习<https://zhuanlan.zhihu.com/p/142664211>。

1. 交换律、分配律、结合律

卷积的积分与微分定理

$$y^{(i)}(t) = x_1^{(j)}(t) \otimes x_2^{(i-j)}(t)$$

这个定理能够简化我们的计算，可以通过移动导数阶数的位置使得求导变得更加容易，从而简化卷积计算。

2. 与冲激函数的卷积定理

$$f(t) \otimes \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

$$f(t - t_1) \otimes \delta(t - t_2) = f(t - t_1 - t_2)$$

$$f(t) \otimes \delta'(t) = f'(t)$$

$$f(t) \otimes \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t)$$

$$f(t) \otimes \delta^{(k)}(t - t_0) = f^{(k)}(t - t_0)$$

其中很多是上一条性质的应用。

3. 卷积定理

对傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

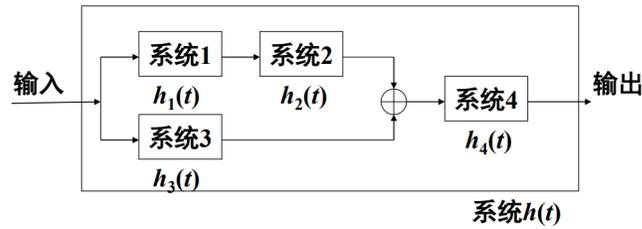
$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)$$

对拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}[f_1(t) \otimes f_2(t)] = F_1(s) F_2(s) \quad \mathcal{L}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} [F_1(s) \otimes F_2(s)]$$

这为下一讲引入拉氏变换求解打下基础。

4. 系统与卷积



• 系统的冲激响应函数：

$$H(\omega) = \{[H_1(\omega)H_2(\omega)] + H_3(\omega)\}H_4(\omega)$$

$$h(t) = \{[h_1(t) \otimes h_2(t)] + h_3(t)\} \otimes h_4(t) \implies$$

$$H(s) = \{[H_1(s)H_2(s)] + H_3(s)\}H_4(s)$$

7.3 卷积法求解零状态响应

如何描述一个系统？让我们从冲激响应该起。

$$\delta(t) \xrightarrow{\hspace{2cm}} h(t)$$



$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \implies r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

零状态响应的求解方式如下：

$$r(t) = e(t) \otimes h(t)$$

其中 $e(t)$ 为激励项， $h(t)$ 为单位冲激响应。若时域不好求，可通过卷积定理在频域进行计算再你变换到时域。

其同样是一种对系统的定义方法。为什么能够这样定义呢？这里谈谈我自己的理解。我认为上图很好地展示了什么是系统——在给定输入的情况下，对输入进行一定操作后得到输出。而**单位冲激响应**便定义了系统对输入进行了什么操作。那么为什么在单位冲激输入时猜得到这个操作呢，因为任意函数跟冲激函数的卷积都是自身，因此吧冲激函数看成单位一的话便能够巧妙地得到系统内部过程。激励项便对系统起到一个限制作用，使得任意通过系统的过程限制在激励项范围内。因此这两者结合，再加上一定的初值，便能够唯一的描述系统。

7.4 重点 summary

理解零输入相应和零状态响应。

掌握基本卷积性质，会从时域和频域两方面求卷积。

8. 专题：初值带入问题以及零输入/状态的理解

这一切的一切都要从线性时不变系统说起。

8.1 0_- 与 0_+ 的初值究竟差在哪

我们现在研究的为线性时不变系统，在 $t = 0$ 时刻开始输入激励，因此系统在 $t < 0$ 部分的输出是不包含输入（激励）信息的——具体来说是不包含从 0 开始输入的信息，其仅由系统初始状态导致。

那么 0_- 与 0_+ 状态的区别就在于一个还未有输入激励，一个已经有输入激励了，而这导致 $t = 0$ 点往往是间断点，从而导致两个数值有很大差别——反应在下一阶导数的冲激函数上，因此在代入初值的时候不能混淆。

回顾时域经典法的初值，带入 0_+ 状态，这是因为我们的目的是求解输出与输入的关系——需要输入的介入，因此我们必须带入 0_+ 来进行求解。

8.2 零输入相应和零状态响应的初值条件为何如此

零输入响应的定义是系统在没有输入激励的情况下的响应，而 0_- 刚好代表的是无激励的情况。因为无输入，所以 0_- 与 0_+ 状态是一致的——没有其他因素干涉，这也就印证了初始条件的 $r^k(0_-) = r^k(0_+)$ 。特别注意再次强调：若只有 $r^k(0_+)$ 则一定要求 $r^k(0_-)$ ，去掉激励的影响，换句话说，是去掉间断点的“断”。

零状态响应的定义式系统起始状态为零的条件下，仅仅由系统外加激励信号引起的响应。因此不奇怪得到 $r^k(0_-) = 0$ 的结论。那么这里的 $r^k(0_+)$ 状态是什么呢？我们知道 0_+ 等于跳变加 0_- ，而 0_- 是 0，因此此处的 $r^k(0_+)$ 只包含跳变信息，换句话说，只留下间断点的“断”。

8.3 自由响应/受迫响应 && 零输入相应/零状态响应

从结果上来说，这两对关系只不过是最终结果的两种不同理解。

(1). 自由响应/受迫响应其实就是齐次解和特解。

(2). 零输入相应/零状态响应其实是将初值做了拆分。

而为什么两者的最终答案一致，首先方程的关系摆在那里，就已经确定了系统的基本特征，只剩下一些系数无法确定。那么一切就要视初值而定。如果把自由响应/受迫响应的初值叫做全初值的话，零输入相应/零状态响应初值叫做基值和跳变值的话，他们满足如下条件“全初值 = 基值 + 跳变值”。由线性可加性，便能够证明最终求得的结果是一致的。

9. 连续时间系统的 S 域分析

这是连续系统的最后一节！大家加油！这讲将会提供一个求零状态响应的“大杀器”。

9.1 系统函数

Definition 9.1.1 — 系统函数. 零状态条件下系统零状态响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比，也称为转移函数、传递函数、传输函数。

注意系统函数是 s 域上的函数不是时域函数。

将上述定义转化为求解方法：

$$H(s) = \frac{R_{zs}(s)}{E(s)}$$

这里的 H, R, E 分别对应上一讲中的 $h(t), r(t), e(t)$ 的拉氏变换。

回顾拉氏变换性质：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0_-)$$

因为为零状态响应，因此 $f^{(r)}(0_-) = 0$ ，从而 $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$ 。

因此对于已知关系：

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} r(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} r(t) + a_0 r(t) \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m} e(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} e(t) + b_0 e(t) \end{aligned}$$

经过拉氏变换可得：

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)R_{zs}(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)E(s)$$

再通过移项便可求出系统函数—— $H(s)$ 。

同样的，可以通过系统函数求零状态响应： $R_{zs}(s) = H(s)E(s)$ 。

■ **Example 9.1** 求系统函数：

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} + 5\frac{dr(t)}{dt} + 6r(t) = 2\frac{d^2e(t)}{dt^2} + 6\frac{de(t)}{dt}$$

解：

$$\begin{aligned} s^2R(s) + 5sR(s) + 6R(s) &= 2s^2E(s) + 6sE(s) \\ H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} &= \frac{2s^2 + 6s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2s}{s + 2} = 2 - \frac{4}{s + 2} \end{aligned}$$

值得注意的是，我们可以先求 $H(s)$ 再求 $R_{zs}(s)$ 。尽管 $H(s)$ 的公式中包含了 $R_{zs}(s)$ ，但事实上在求解过程中我们不必知道 $R_{zs}(s)$ ，因为微分方程自身已经携带了这个比值信息。

9.2 从系统函数到零状态响应——拉式逆变换

如今我们已经得到了系统函数在频域表示，那么如何将复杂的式子逆变换到时域呢，这里就要用到一个很常见的方法——部分分式分解法。相信大家对其并不陌生，在高中的数列列项中也常有应用。

对于得到的系统函数往往有如下形式：

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_ms^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1s + a_0}{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}$$

考虑复数的存在，则一定可以进行因式分解为：

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{b_n(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

其中 z_i 为零点， p_i 为极点。（这应该很好记忆，很形象的名称）

我们的目标形势如下（以无重根为例）：

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

目的是简化逆变换的难度，而我们最熟悉的变换就是 $\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$ 。

接下来我将介绍实极点的处理方式。而虚极点在题目中基本遇不到，并且其处理方法其实与实根的思路是完全一致的。因此如果感兴趣可自行查阅资料学习。

实极点单根

欲求系数 K_i ，考虑做如下操作：

$$(s-p_i)F(s) = \frac{(s-p_i)K_1}{s-p_1} + \frac{(s-p_i)K_2}{s-p_2} + K_i + \dots + \frac{(s-p_i)K_n}{s-p_n}$$

再将 $s = p_i$ 带入，不难发现右端除去 K_i 都是 0，因此便能够求出 $K_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i}$ 。

实极点重根

对于极点有重根的情况来说，系统函数应该具有以下形势：

$$F(s) = \frac{A(s)}{(s-p_1)^k D(s)}$$

而我们的目标是将其拆分成：

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{K_{1k}}{(s-p_1)^1} + \frac{A'(s)}{D(s)}$$

不难发现上面的单根方法已经不在适用了——问题在于拆分后有多项分母与 p_i 有关。进行如下操作：

$$(s-p_1)^k F(s) = K_{11} + K_{12}(s-p_1) + \dots + K_{1k}(s-p_1)^{k-1} + \frac{A'(s)(s-p_1)^k}{D(s)}$$

因此我们现在能够求出 $K_{11} = (s-p_1)^k F(s)|_{s=p_1}$ ，原理与单根是类似的。那其他次数的系数如何求解？考虑求导的方法——因为常数的导数为 0：

$$\begin{aligned} \frac{d[(s-p_1)^k F(s)]}{ds} &= K_{12} + \dots + (k-1)K_{1k}(s-p_1)^{k-2} + \frac{d[\frac{A'(s)(s-p_1)^k}{D(s)}]}{ds} \\ K_{12} &= \left. \frac{d[(s-p_1)^k F(s)]}{ds} \right|_{s=p_1} \\ K_{13} &= \left. \frac{1}{2} \frac{d^2[(s-p_1)^k F(s)]}{ds^2} \right|_{s=p_1} \\ K_{1i} &= \left. \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}[(s-p_1)^k F(s)]}{ds^{i-1}} \right|_{s=p_1} \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

这样我们就能够解决分式分解的问题了。

形式简单

如果形式简单的话，可以直接进行拆分——运动待定系数法。因为我们已知拆分后的形式，因此直接将系数设出来，在进行通分，最后与原式比较求系数即可。

总之一定要掌握分式分解的方法，其不止在《信号与系统》这门课中有所应用，在《微分方程》中也会有所涉及，对化简计算有很大的帮助。

9.3 零极点蕴含的信息

9.3.1 什么是稳定系统

Definition 9.3.1 — 稳定系统. 如果一个系统对任意有界输入，其零状态响应也是有界的，则称该系统为有界输入有界输出（BIBO）稳定的系统，简称稳定系统

9.3.2 系统稳定性判断

为了验证是否是 BIBO 系统，我们从系统函数入手——它控制者输入到输出的变换关系。

这里给出结论：

- 时域： $h(t)$ 绝对可积。
- s 域：极点位于位于 S 平面左半平面。

	s域	时域
• 稳定系统	$H(s)$ 的极点 位于 s 左半平面	$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$
• 不稳定系统	$H(s)$ 的极点 位于 s 右半平面 或在虚轴有二阶以上极点时	$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) \rightarrow \infty$
• 临界稳定系统	$H(s)$ 极点 位于 s 平面虚轴上且只有一阶 (含一阶零点)	$t \rightarrow \infty, h(t)$ 为非零常值或 等幅振荡

注意辨析“稳定系统”和“终值存在”：

终值存在条件比稳定系统多了一种可能：只在 $s = 0$ 存在单根的情况，对应的是临界稳定状态中的非零常值情况。

9.4 重点 summary

系统函数求法

极点与稳定性的关系

10. 离散信号与离散时间系统

恭喜各位已经跨过了连续时间系统的难关，接下来我们将步入对离散信号的认识与理解。如果连续系统掌握的还不错的话，相信离散对你来说便是小菜一碟。希望大家能够找到离散、连续中的相同之处，不仅能够提高学习效率，并且大大降低了学习难度，提高了扎实程度。

10.1 离散信号基本知识

10.1.1 离散时间信号的表示

- 函数法，如 $x[n] = 2^n$
- 序列法，如 $x[n] = 0, 1, 2, 3, \dots$

10.1.2 典型离散时间信号

单位样值函数 $\delta(t)$ 、单位阶跃序列 $u(t)$ 、矩形序列 $R(t)$ 、斜变序列、三角函数序列、单边指数序列等等。具体样式不再给出，默认大家已掌握这些基本知识。

单位样值函数

与冲激函数类似，也有抽样性质：

$$x[n]\delta[n-m] = x[m]\delta[n-m]$$

同样的，可用其进行信号分解：

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m]$$

10.1.3 三角函数序列的周期性

三角函数序列为 $x[n] = A\sin(n\omega_0 + \phi)$ 。

- 若 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数，则周期为 T 。
- 若 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数 $\frac{p}{q}$ ，则周期为 qT 。
- 若 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数，则为非周期函数。

10.1.4 离散信号的运算和表示

基本运算

包括加法、乘法、数乘、时移、反褶、尺度变换、差分、累加等。这里仅介绍反褶、差分，其它相信大家早已熟悉。

反褶: $x[n] = x[-n]$

差分:

- 前向差分 $\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$
- 后向差分 $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$

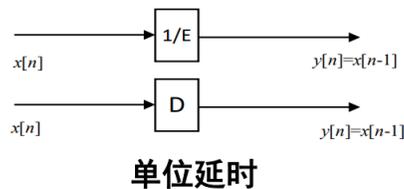
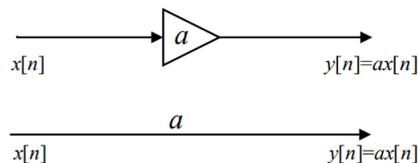
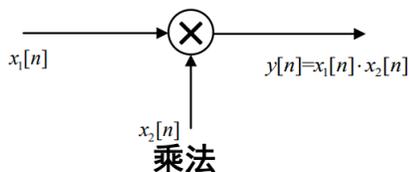
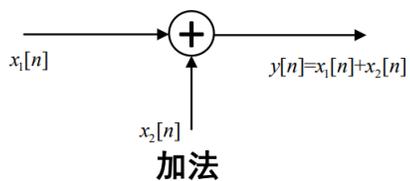
未来我们依旧主要研究线性时不变的因果系统，因此前向差分很少能够用到。因为因果不希望有未来的函数值出现。

离散系统表示

与连续系统类似，包括差分方程和框图表示。

对于框图而言：

— 基本的运算单元



10.2 时域分析——如何求解某时刻的函数值

10.2.1 迭代法

根据差分方程表达式及初值计算，不断递推到目标位置。

■ **Example 10.1** 计算斐波那契的第 7 项。 ■

10.2.2 时域经典法

与连续系统的时域经典法思路几乎完全一致，完全解 = 齐次解 + 特解。

齐次解

齐次方程 → 特征方程 → 特征根 → 写出齐次解形式。

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{N-1} y[n-N+1] + a_N y[n-N] = 0$$

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \dots + a_{N-1} \alpha + a_N = 0$$

得到特征根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 。

根据特征根设出通解，**注意通解形式与连续系统不同**：

$$y[n] = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \dots + C_N \alpha_N^n$$

若有重根，其中重根的部分这样设：

$$y[n] = (C_1 n^{k+1} + C_2 n^{k-2} + \dots + C_{k+1} n + C_n) \alpha_1^n$$

特解

按照激励设特解：

- $a^n \rightarrow ba^n$
- $n^k \rightarrow b_1 n^k + b_2 n^{k-1} + \dots + b_k$
- $ku(n) \rightarrow$ 常数 p

带入初值

在离散系统中，**对初值没有要求**，这就代表带入 0 时刻前的值也能够正确得到结果——离散系统不存在 0_- 到 0_+ 的跳变。

10.3 重点 summary

常见的离散信号

离散系统的时域经典法

11. 离散时间系统及卷积

这一章将介绍零输入与零状态响应——与连续时间系统知识完全对应。

11.1 离散系统中零输入/零状态响应得到求解

与连续系统完全一致：

$$\begin{aligned}y(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n C_{zik} \alpha_k^n \right) + \left(\sum_{k=1}^n C_{zsk} \alpha_k^n + \beta(n) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n C_k \alpha_k^n + \beta(n)\end{aligned}$$

其中第二个等式正是“零输入 + 零状态”。

与连续系统求解有哪些不同呢？

解得形式不同

离散对应的为：

$$y[n] = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \dots + C_N \alpha_N^n$$

而连续对应的是：

$$y(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \dots + C_N e^{\alpha_N t}$$

离散系统没有 0_- 到 0_+ 的跳变

再次强调初值条件

零输入：带入的应该是 $y[-1], y[-2]$ 等 $y[n < 0]$ 的值。

零状态：带入的应该是在 $y[n < 0] = 0$ 时求出的 $y[0], y[1]$ 等 $y[n \geq 0]$ 的值。

■ **Example 11.1** 求 $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$ 的完全响应, 已知 $y(-1) = 1$.

解:

只有一个特征根为 0.9, 易求其特解为 $\beta = 0.5$, (通过 $\beta - 0.9\beta = 0.05$ 确定)

对于零输入相应:

$y_{zi}(n) = C_{zi} * 0.9^n$, 带入 $y(-1) = 1$, 求出 $C_{zi} = 0.9$, 因此 $y_{zi}(n) = [0.9 * 0.9^n]u(n)$

对于零状态响应:

$y_{zs}(n) = C_{zs} * 0.9^n + 0.5$, 通过 $y(-1) = 0 \rightarrow y(0) = 0.05$, 带入 $y(0)$ 求出 $C_{zs} = -0.45$, 即

$y_{zs}(n) = [-0.45 * 0.9^n + 0.5]u(n)$

最终 $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) = [0.45 * 0.9^n + 0.5]u(n)$

■

11.2 单位样值响应

Definition 11.2.1 — 离散系统的单位样值响应. 以单位样值函数 $\delta(n)$ 为激励, 系统产生的零状态响应, 通常用 $h(n)$ 表示。换句话说, 单位样值响应 $h(n)$ 就是输入信号为 $\delta(n)$ 时系统的输出信号。

可以把这个概念与连续系统中的单位冲激响应 $h(t)$ 相类比, 其实他们是一致的, 只不过是在连续和离散中的不同表现。

那么如何求解? 再联系系统中我们有**拉氏变换**这个强有力的工具, 但在离散系统之我们还没有学习到与其对应的方法, 因此我们只能将激励替换成单位样值函数, 运用地推的方法进行计算。

$$\begin{aligned} a_0y(n) + a_1y(n-1) + \dots + a_{N-1}y(n-N+1) + a_Ny(n-N) \\ = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_{M-1}x(n-M+1) + b_Mx(n-M) \end{aligned}$$

替换为

$$\begin{aligned} a_0h(n) + a_1h(n-1) + \dots + a_{N-1}h(n-N+1) + a_Nh(n-N) \\ = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + \dots + b_{M-1}\delta(n-M+1) + b_M\delta(n-M) \end{aligned}$$

■ **Example 11.2** 试求 $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$

$$h(0) = \frac{1}{2}h(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = \frac{1}{2}h(0) + \delta(1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$h(2) = \frac{1}{2}h(1) + \delta(2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$h(n) = \frac{1}{2}h(n-1) + \delta(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

■

事实上， Z 变换就是离散中的拉氏变换，这个方法将会在下一讲中给出。

11.3 离散系统中的卷积

这里给出离散卷积的计算方式，希望大家与连续系统类似，能够从图形的角度去理解这件事情：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m) = x(n) \otimes h(n)$$

其有着交换律、结合律、分配律， $x(n) \otimes \delta(n-m) = x(n-m)$ 。

11.3.1 卷积的计算

定义法

按照定义的公式直接进行计算。

图解法

共分为五个步骤：

- 变量替换： $h(n) \rightarrow h(m)$
- 时间反转： $h(m) \rightarrow h(-m)$
- 时间移位： $h(-m) \rightarrow h(n-m)$
- 乘法计算： $x(m)h(n-m)$
- 求和： $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$

对位相乘求和法

$x_1(n) = \{4, 3, 2, 1\}$, $x_2(n) = \{3, 2, 1\}$, 求 $x_1 \otimes x_2$

$$\begin{array}{rcccc}
 x_1(n) & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 \otimes x_2(n) & & & 3 & 2 & 1 \\
 \hline
 & & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & & 8 & 6 & 4 & 2 \\
 + & & 12 & 9 & 6 & 3 & \\
 \hline
 y(n) & 12 & 17 & 16 & 10 & 4 & 1
 \end{array}$$

所以 $y(n) = \{12, 17, 16, 10, 4, 1\}$

注意不需要调换某一个序列的顺序。

运用性质——与单位样值函数有关

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

$$y(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$y(n) = [\delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)] \otimes [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)]$$

$$= \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

$$+ \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3)$$

$$+ \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-4)$$

$$= \delta(n) + 3\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 5\delta(n-3) + 3\delta(n-4)$$

11.4 重点 summary

离散的零输入、零状态求解

卷积的性质与计算

12. 离散系统的 Z 变换

在这章我们将会学习离散系统中的拉普拉斯变换——Z 变换。这也是继傅里叶变换、拉普拉斯变换后的第三种变换方式。

12.1 Z 变换

回顾第 9 章介绍的单位样值函数性质，对于连续因果信号：

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

如果对其做拉氏变换的话：

$$X_s(s) = \mathcal{L}[x_s(t)] = \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right] e^{-st} dt$$

通过积分求和换序：

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-st} dt \right] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

再令 $Z = sT$ ：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

而这就是 Z 变换——离散中的拉氏变换。

考察 Z 的数据结构：因为 $s = \sigma + j\omega$ ，因此 s 是复数（这也就是为什么 s 平面时复平面），所以 z 事实上也是一个复数——有实部和虚部—— z 平面。

12.2 Z 变换的收敛域问题

这里是对《数学分析》课程中**级数**知识的应用。主要用到两种判别法——**比值判定法和根值判定法**，方法的具体内容不做介绍，读者应在《数学分析课程中已掌握》。

12.2.1 有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其收敛域为：

$$ROC = \begin{cases} 0 \leq |z| < \infty & n_2 < 0 \\ 0 < |z| < \infty & n_1 < 0, n_2 > 0 \\ 0 < |z| < \infty & n_1 < 0 \end{cases}$$

12.2.2 无限长序列

右边序列

$$x(n) = x(n)u(n - n_1)$$

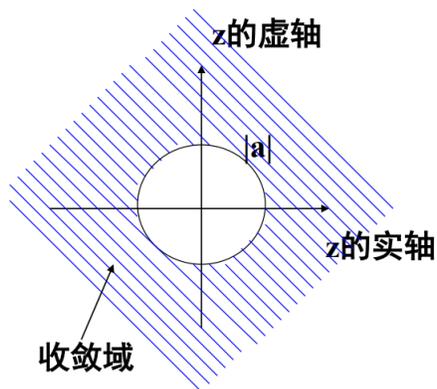
其收敛域为：

$$ROC = \begin{cases} |z| > |R_1| & n_1 \geq 0 \\ |R_1| < |z| < \infty & n_1 < 0 \end{cases}$$

其中：

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x(n)} \right| = |R_1|$$

在此让我们看一下收敛域的图像表示。在拉氏变换中我们知道收敛域是在左半平面。而对于 z 来说，我们将其划分为实部和虚部。注意到 ROC 中是 $|z|$ ——即模长，对应到二维平面中应该是以圆为单位。



左边序列

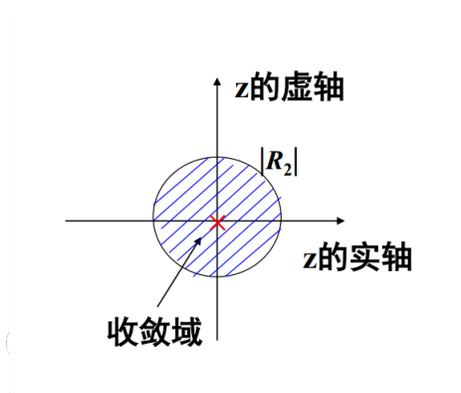
$$x(n) = x(n)u(n_2 - n)$$

其收敛域为:

$$ROC = \begin{cases} 0 < |z| < |R_2| & n_2 > 0 \\ 0 \leq |z| < |R_2| & n_2 \leq 0 \end{cases}$$

其中:

$$\left| \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x(-n)}} \right| = |R_2|$$



双边序列

即为上述两种情况的交集:

$$ROC = \{|a| < |z| < |b|\}$$

12.3 常见 Z 变换

$f(n)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$

Table 12.1: 常见 Z 变换表

12.4 逆 Z 变换

12.4.1 长除法

因为 Z 变换后为：

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \dots + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + \dots$$

所以实际上我们求解的是 z^i 前的系数。而 Z 变换后往往是一有理函数，形如：

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M a_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}} = \frac{a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_{M-j} z^{M-1} + a_M z^N}{b_0 + b_1 z^1 + \dots + b_{N-1} z^{N-1} + b_N z^N}$$

因此采用多项式除法便能够得到相应的系数了。

注意左边/右边序列求解时，多项式的排列方法。

12.4.2 部分分式展开法

我们的目标结果为：

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K_1}{z-p_1} + \frac{K_2}{z-p_2} + \dots + \frac{K_N}{z-p_N}$$

注意先除以 z 在进行拆分。

再知道目标形式后就可以按照与拉氏变换完全相同的方法来进行拆分了。

■ **Example 12.1** 已知 Z 变换求解原序列：

- 示例：求 $X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$ 的逆变换 $x(n)$ （收敛域为 $|z| > 1$ ）
- 解：

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$
 - 有两个一阶极点： $z_1=0.5$ ， $z_2=1$
 - 设： $\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5}$ 则： $A_1 = \left[\frac{X(z)}{z}(z-1) \right]_{z=1} = 2$ ， $A_2 = \left[\frac{X(z)}{z}(z-0.5) \right]_{z=0.5} = -1$
 - 因为：收敛域为 $|z| > 1$ ，所以是右边序列
 - 所以： $x(n) = (2 - 0.5^n)u(n)$

12.5 Z 变换的性质

线性

时移

双边序列:

$$\mathcal{Z}[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$

右移位 (分别为右边序列和左边序列):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(n-m)] &= z^{-m}X(z) \\ \mathcal{Z}[x(n-m)u(n)] &= z^{-m} \left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]\end{aligned}$$

左移位 (分别为右边序列和左边序列):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(n+m)u(n)] &= z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^k \right] \\ \mathcal{Z}[x(n+m)] &= z^m X(z)\end{aligned}$$

z 域微分

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{d[X(z)]}{dz}$$

尺度变换

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

初值定理

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

因为含有 z 的项都为 0, 因此最后只剩下 $x(0)$ 。沿用这个思路, 可以得到 $x(1)$ 的表达式:

$$x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z [X(z) - x(0)]$$

终值定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

与拉氏变换的终值类似, 首先要判断其是否存在终值, 这里给出存在的条件: **所有极点位于 z 平面的单位圆内, 或者在 $z=1$ 处有单根 (常数)。**

时域卷积定理

$$\mathcal{Z}[x_1(n) \otimes x_2(n)] = X_1(z)X_2(z)$$

12.6 重点 summary

Z 变换的来源

收敛域问题

逆 Z 变换的求法

Z 变换的性质

13. 离散时间系统的 Z 域分析

13.1 Z 变换求解差分方程

在连续系统中，我们采用拉氏变换简单的求出了零状态响应。那么在离散系统中，运用刚刚掌握的 Z 变换知识，同样也能够解决离散系统中的差分问题。

方法为——Z 变换，移项求解，逆 Z 变换。

■ **Example 13.1** 请以 Z 变换的方式，再次求解 $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n), y(-1) = 1$ 的响应。
解：

$$Y(z) - 0.9[z^{-1}Y(z) + y(-1)] = 0.05 \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{0.05z^2}{(z-1)(z-0.9)} + \frac{0.9y(-1)z}{z-0.9}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.5z}{z-1} + \frac{0.45z}{z-0.9}$$

$$y(n) = (0.5 + 0.45 \times (0.9)^n)u(n)$$

■

13.2 系统函数求解

同样的，在离散系统中也可用 Z 变换求解系统函数，其方式与连续系统一致——初始状态为 $y(n < 0) = 0$ 。

对差分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

系统函数为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

13.3 极点与稳定性关系

全部极点位于 z 平面单位圆内。

注意与终值存在的区别——在 $z = 0$ 的单根仅是终值存在的条件。

13.4 重点 summary

Z 变换求解响应

Z 变换求解系统函数

离散系统的系统稳定性

14. 专题：Z 变换与拉氏变换的关系

14.1 s 平面与 z 平面的对应关系

上一讲曾提到： s 的复数结构导致了 z 也为复数，具体来说：

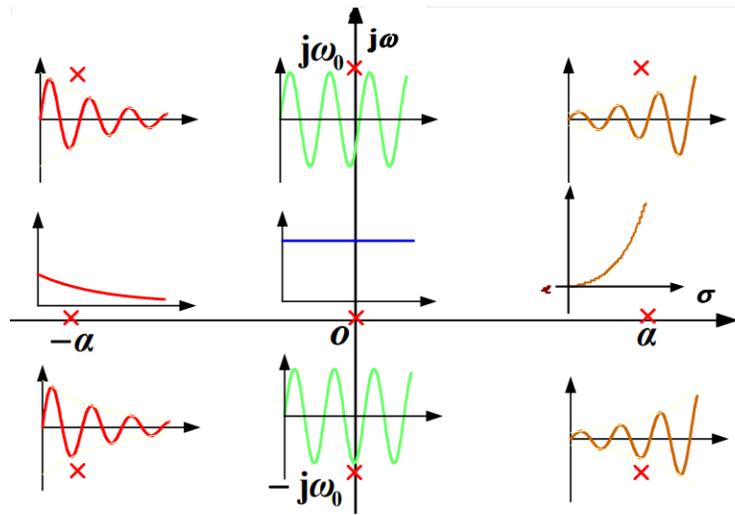
$$z = e^{sT_s} = e^{(\sigma + j\omega)T_s} = e^{\sigma T_s} e^{j\omega T_s} = r e^{j\theta}$$

这就导致了两者的对应关系如下表展示：

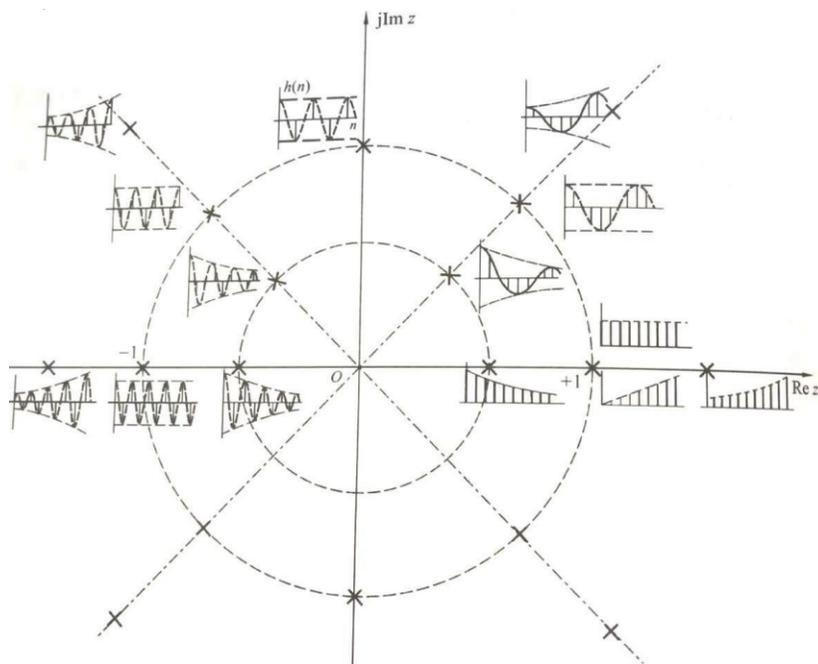
s平面	z平面
$\sigma = \omega = 0$ 原点	$r = 1, \theta = 0$, 即 $z=1$
$\sigma < 0$ 左半平面	$r < 1$ 单位圆内
$\sigma = 0$ 虚轴	$r = 1$ 单位圆上
$\sigma > 0$ 右半平面	$r > 1$ 单位圆外
σ 为常数: $-\infty \rightarrow +\infty$ 从左向右移	r 为常数: $0 \rightarrow +\infty$ 半径不断扩大
$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ 条带	$r_1 < r < r_2$ 圆环
$\omega = 0$ 实轴	$\theta = 0$, 正实轴

14.2 s 平面与 z 平面的稳定性关系

s 平面可从两个维度来认识—— x, y 方向—— x 方向代表收敛关系， y 方向代表震荡剧烈程度。



z 平面可从两个维度来认识——圆周方向和由内到外——圆周方向代表着震荡的剧烈程度，由内到外代表着从收敛到发散。



15. 离散时间信号分析——从连续到离散

15.1 离散周期信号的傅里叶级数

15.1.1 基函数

余弦信号集

$$\cos \left[0 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right] \cos \left[1 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right] \cos \left[2 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right], \dots$$

余弦信号集

$$\sin \left[0 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right] \sin \left[1 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right] \sin \left[2 \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right], \dots$$

复指数信号集

$$e^{j(k\frac{2\pi}{N}n)} \quad \text{or} \quad e^{j(k\Omega_0n)}$$

能够注意到：离散周期信号的倍频信号只有 N 种。且其是周期性的，举例来说：

$$\cos \left[(k+N) \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right] = \cos \left[k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n + N \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right] = \cos \left[k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n + 2\pi n \right] = \cos \left[k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot n \right]$$

15.1.2 离散傅里叶级数变换公式

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0n} \quad X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0n}$$

也可以写成:

$$\text{IDFS}[X(k)] = x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \quad \text{DFS}[x(n)] = X(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n)W_N^{-kn}$$

15.2 离散时间傅里叶变换 DTFT

首先要明确：**离散时间傅里叶变换并不是离散傅里叶变换。**

在计算机中，数据的存储是离散的——位数越多精度越高，但总归是有最小刻度，而对离散的处理工具让我们能够运用计算机这个强力的工具来帮助我们处理数据。

这里直接给出 *DTFT* 的公式：

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

通过观察我们能够发现—— $x(n)$ 是离散的，但是 $X(\Omega)$ 仍然是离散的，其实从求和和积分负号也能够发现如上特点。那么如果计算机采用这种方式的化，其依旧无法对频域进行刻画——频域是连续的。因此这个变换叫做**离散时间傅里叶变换**，仅在时间上是离散的。而后续提到的**离散傅里叶变换**才是真正的时频域均离散，我们将逐步从连续转为离散。

在离散傅里叶级数中我们知道其基函数是周期的，对于 DTFT 依旧有类似性质：

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j(\Omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} e^{-j2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

15.3 离散连续？周期非周期？

这里简要总结学到的诸多方法：

	连续	离散
周期	傅立叶级数 (Fourier Series, FS)	离散傅立叶级数(Discrete Fourier Series, DFS)
非周期	傅里叶变换 (Fourier Transform, FT)	离散时间傅立叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)

而对时域与频域的对应关系：

时域函数	傅里叶分析方法	频域函数
连续+周期	傅立叶级数 (Fourier Series, FS)	非周期+离散
连续+非周期	傅里叶变换 (Fourier Transform, FT)	非周期+连续
离散+周期	离散傅立叶级数(Discrete Fourier Series, DFS)	周期+离散
离散+非周期	离散时间傅立叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)	周期+连续

注意规律：时域连续离散对于频域周期非周期，时域周期非周期对应频域连续离散。

具体如何记忆，笔者是这样理解的：对于时域来说，一个周期函数如 \sin 在频域上不过对应一个点。而周期函数由周期性，便也就能用频域上有限个点来进行描绘，即时域周期对于频域离散。

知道这个对应关系后，便可以得到非周期对应连续。观察到这种对应关系是双向的，因此也就记住了这四个关系。

还是希望大家能够从原理上搞懂，上述不过是一种投机的记忆方式罢了。

15.4 重点 summary

离散变换的周期性

不同分析方法的应用场景

连续离散与周期非周期的对应关系



16. 离散傅里叶变换

这一讲将会介绍一种完全的离散方法——离散傅里叶变换 (DFT)。其时频域均是离散的，是计算机能够运用的方式。此外，通过考究其性质可以进行优化，成为计算机常用方法的快速傅里叶变换 (FFT)。

从现在开始后续知识主要以了解为主，尽量搞懂其独特之处。

16.1 离散傅里叶变换

16.1.1 周期延拓

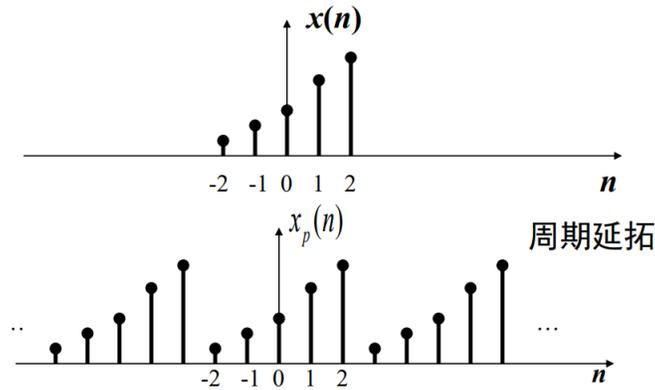
对于离散有限长序列：

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \textit{else} \end{cases}$$

定义周期延拓为：

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n+rN) \quad r \in \mathbb{Z}$$

从图像上来看，其变换是这样的：



Definition 16.1.1 — 主值区间. 对于周期为 N 的序列 $x_p(n)$, 定义其第一个周期 $n = 0$ 到 $N - 1$ 范围为主值区间, 在主值区间的序列为主值区间序列, 简称主值序列。

16.1.2 频域离散化

频谱以 2π 为周期, 设离散化后的频谱为一周期内 N 个点, 即 $[0, 2\pi)$ 内有 N 个点, 间隔频率为 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, 每个采样点的频谱用 $X_p(k)$ 表示。

$$X_p(k) = X(\Omega) \Big|_{\Omega=k\Omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jk\Omega_0 n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

用 $n' = n + rN$ 带入:

$$X_p(k) = \sum_{n'=0}^{N-1} \left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n' + rN) \right) e^{-jk\frac{2\pi}{N}(n' + rN)} = \sum_{n'=0}^{N-1} x_p(n') e^{-jk\frac{2\pi}{N}n'}$$

不难发现其实际上是对 $x_p(n)$ 进行傅里叶变换, 回顾时域离散周期对应频域周期离散。因此我们的频域便是离散的。

16.1.3 变换对与整体变换流程

整个变换公式为:

$$X(k) = \text{DFT}[x_p(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-jk\Omega_0 n} \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X_p(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{i\Omega_0 n} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

实际上周期延拓对离散起到了大作用, 我们需要的均为主值区间。整体的变换流程为:

$$x(n) \xrightarrow{\text{周期延拓}} x_p(n) = (x(n))_N \xrightarrow{\text{DFS}} X_p(k) \xrightarrow{\text{取主值序列}} X(k) \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$X(k) \xrightarrow{\text{周期延拓}} X_p(k) = (X(k))_N \xrightarrow{\text{IDFS}} x_p(n) \xrightarrow{\text{取主值序列}} x(n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

■ **Example 16.1** 思考题:

试证明若 $X_p(k) = X_p(-k)$, 则有 $x_p(n)$ 是实偶函数成立。

(提示: 考虑复数到三角函数的变换, 考虑复平面的对称性)

■

16.2 快速傅里叶变换

离散傅里叶变换的时间复杂度为 $O(n^2)$, 在处理长的序列时, 计算时间过长。而快速傅里叶变化大大加快了计算速度, 复杂度降到了 $O(n \log_2(n))$ 。

■ **Example 16.2** 为什么离散傅里叶变换的时间复杂度为 $O(n^2)$? ■

定义简洁变量 $W_N^i = e^{j\frac{2\pi}{N}i}$, 以下均以此变量来进行推导。

离散傅里叶变换的矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{1*1} & W_N^{2*1} & \dots & W_N^{(N-1)*1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{1*(N-1)} & W_N^{2*(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)*(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

接下来我们将主要对矩阵进行化简。不妨以 $N=4$ 来举例:

$$\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^4 & W_4^9 \end{bmatrix}$$

16.2.1 W_N^i 的周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(nk)_N}$$

矩阵化简为:

$$\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix}$$

16.2.2 W_N^i 的对称性

$$W_N^{nk+\frac{N}{2}} = -W_N^{nk}$$

矩阵化简为:

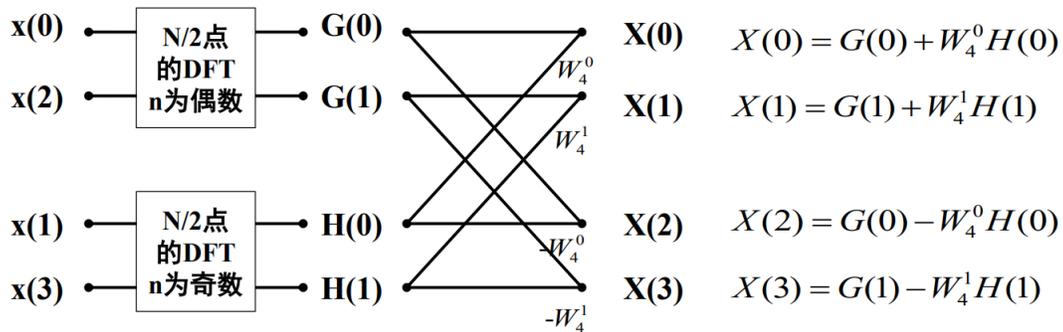
$$\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & -W_4^0 & -W_4^1 \\ W_4^0 & -W_4^0 & W_4^0 & -W_4^0 \\ W_4^0 & -W_4^1 & -W_4^0 & W_4^1 \end{bmatrix}$$

16.2.3 W_N^i 的可约性

$$W_N^{nk} = W_{Nm}^{nk}, \quad W_N^{nk} = W_{N/m}^{nk/m}$$

由此可将大矩阵进行拆分, 得到小矩阵再重复上述运算。

16.2.4 基 2 时间抽取的快速傅里叶变换



这种方法叫作蝶形算法。

16.2.5 快速傅里叶变换究竟加速了多少

$N = 2048$ 时:

- *DFT*: 进行乘法运算 $2048 * 2048 = 4,194,304$ 次, 计算加法 $2048 * (2048 - 1) = 4,192,256$ 次。共运算 8,386,560 次。

- *FFT*: 进行乘法运算 $\frac{2048}{2} * \log_2(2048) = 11,264$ 次, 计算加法 $2048 * \log_2(2048) = 22,528$ 次。共运算 33,792 次。
- $\frac{33,792}{8,386,560} = 4.03\%$ 。可见计算量仅为原来的 4% 左右, 大大降低了计算成本。

16.3 重点 summary

离散傅里叶变换的周期延拓思想
快速傅里叶变换为什么能够快速

17. 信号的采样

计算机只能够处理离散序列，但现实中往往是连续的序列，那么如何将连续变为离散就要用到**采样**的方式。如何采样才能够代表连续序列呢？换句话说，采样后的序列能不能较好的还原会原连续序列？这一讲的**奈奎斯特采样定律**将会解答这个疑问。

关于信号的重建这里不会做介绍。简要的说是将得到的离散序列进行**插值处理**使其变成连续的。感兴趣的同学可自行上网搜索。

17.1 奈奎斯特采样定律

Definition 17.1.1 — 奈奎斯特采样定律. 要按时域实信号采样后能够无失真还原，采样频率必须大于信号最高频率的两倍， $\Omega_s \geq 2\Omega_h$ 。

此外：

- T 是使采样信号频谱不混叠的最大采样间隔，称为 Nyquist 间隔；
- f_s 是使采样信号频谱不混叠的最小采样频率，称为 Nyquist 频率；
- Ω_s 是使采样信号频谱不混叠的最小采样角频率，称为 Nyquist 角频率。

17.2 最大采样频率的计算

现在已知 $\Phi(t)$ 的最大频率为 f_1 ， $\Psi(t)$ 的最大频率为 f_2 。则：

- $\Phi(t) + \Psi(t)$ 的最小采样频率为 $2\max\{f_1, f_2\}$
- $\Phi(t) \otimes \Psi(t)$ 的最小采样频率为 $2\min\{f_1, f_2\}$
- $\Phi(t) * \Psi(t)$ 的最小采样频率为 $2 * (f_1 + f_2)$
- $\Phi(at)$ 的最小采样频率为 $a * 2f_1$

17.3 重点 summary

提到的都是重点

18. 模拟滤波器设计

18.1 滤什么波

噪声有加性噪声、乘性噪声、卷积噪声等等。因为我们主要研究线性系统，因此主要去除的是加性噪声。

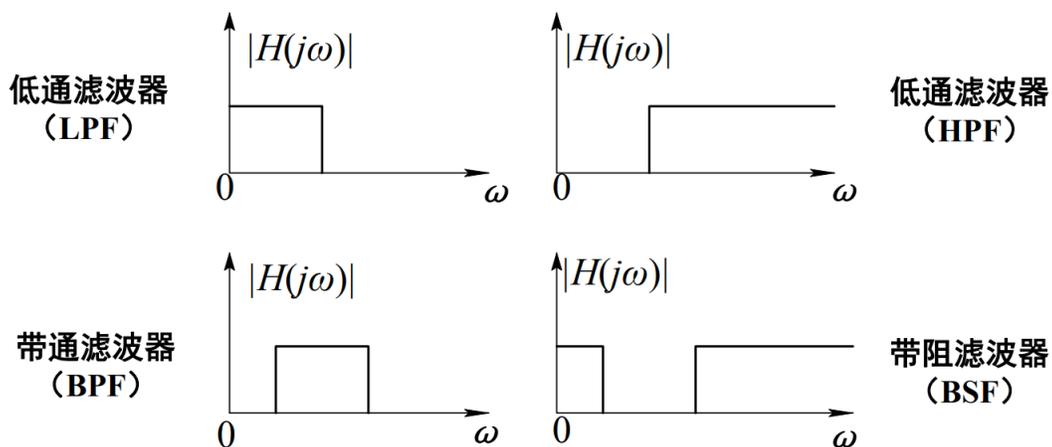
对于信号 $s(t)$ 与噪声 $n(t)$ ，得到的信号为：

$$f(t) = s(t) + n(t) \quad F(\omega) = S(\omega) + N(\omega)$$

即信号成分 $s(t)$ 和噪声成分 $n(t)$ 在频率上是可分离的。

18.2 模拟滤波器

按滤波能力分为：低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器、带阻滤波器。



上图展现了四种**理想的**模拟滤波器。其仅截取了我们需要频段，而舍弃了其它频段。

18.2.1 理想滤波器的不可实现性

首先给大家一个网址，我认为其是众多解释中最清晰且周全的。<https://zhuanlan.zhihu.com/p/590085103>。主要有两个原因：

时域可频域无法同时带限

当信号的时域长度有限时，其频域长度是无限的；反过来频域带线其时域是无限的。因此无论从哪个角度设计滤波器，其时域或频域的无限性均无法在现实中表示出来。

不满足因果性

当激励为单位冲击时，理想滤波器的单位冲激响应在时域上表现为 Sa 函数 ($Sa(t) = \frac{\sin(t)}{t}$)，其在 $t < 0$ 的部分并非恒为 0。

回归因果系统的一种判别方式：其冲激响应在 $t < 0$ 的部分应恒为 0。因此理想滤波器**非因果系统**，无法实现。

18.2.2 模拟滤波器参数

再次仅仅列出部分参数，具体的对应关系默认读者已经掌握。

- ω_p : 通带 (上限) 截止频率
- ω_s : 阻带 (下限) 截止频率
- δ_p : 通带波纹峰值
- δ_s : 阻带波纹峰值
- A_p : 最大衰减响应
- A_s : 最小衰减响应
- ω_1 : 下通带 (上限) 截止频率
- ω_2 : 上通带 (下限) 截止频率
- ω_{sl} : 下阻带 (上限) 截止频率
- ω_{sh} : 上阻带 (下限) 截止频率

18.3 模拟滤波器设计——以低通滤波器为例

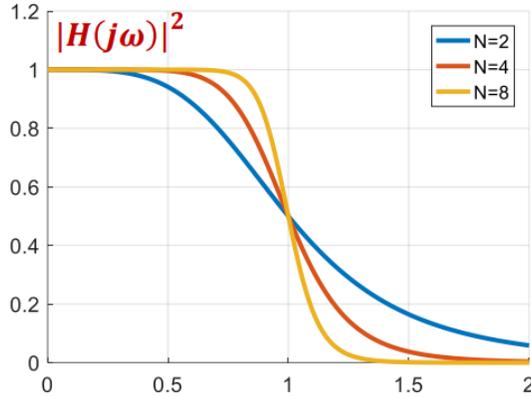
如何从 $|H(j\omega)|$ 设计出系统函数 $H(s)$ 呢，让我们从**极点**下手。

18.3.1 巴特沃斯滤波器

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

特点:

- $\omega = 0$ 时, $|H(j\omega)|^2 = 1$
- $\omega = \omega_c$ 时, $|H(j\omega)|^2 = 1/2$, $A_c = -10\lg|H(j\omega)|^2 = 3\text{dB}$
- ω_c : 3dB 截频, 无论 N 多大, 所有曲线均通过该点



首先列不等式确定出阶数 N

这里直接给出不等式, 其推导过程并不复杂——联立不等式, 请读者自行尝试。

$$\frac{\omega_p}{(10^{0.1A_p} - 1)^{1/(2N)}} \leq \omega_c \leq \frac{\omega_s}{(10^{0.1A_s} - 1)^{1/(2N)}}$$

极点的确定

实函数的傅里叶变换存在共轭对称性, 借用这个性质:

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2N}}$$

也就是说我们可以得到 $H(s)H(-s)$ 的极点个数。

最终极点的值为:

$$s_k = \left(e^{j(2k-1)\pi}\right)^{\frac{1}{2N}} \left(e^{j\frac{1}{2}\pi}\omega_c\right) = \omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi}, k = 1, \dots, 2N$$

我们要从中挑一半作为系统函数 $H(s)$ 的极点, 为了系统的稳定性, 我们挑选 s 平面左边的极点, 即:

$$s_k = \left(e^{j(2k-1)\pi}\right)^{\frac{1}{2N}} \left(e^{j\frac{1}{2}\pi}\omega_c\right) = \omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi}, k = 1, \dots, N$$

最终得到系统函数:

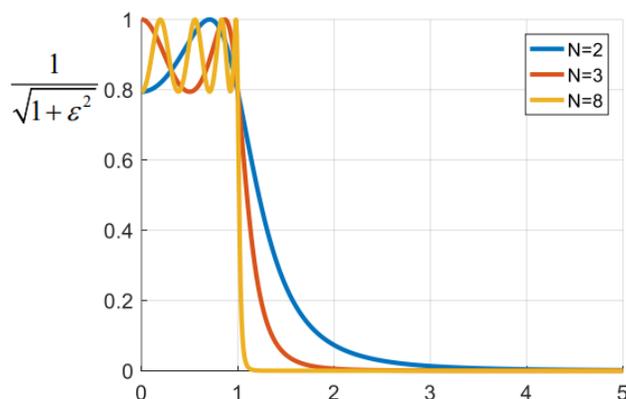
$$H(s) = (-1)^N \prod_{i=1}^N \frac{s_i}{(s - s_i)}$$

此外也可以先频率归一化, 再通过查表法来确定。因为归一化频率情况下, 极点均匀分布在单位圆上。

$$H(s') = \frac{1}{B_N(s')}, B_N(s') = 1 + a_1 s' + a_2 s'^2 + \dots + a_{N-1} s'^{N-1} + 1 s'^N, s' = s/\omega_c$$

18.3.2 切比雪夫 I 型滤波器

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$



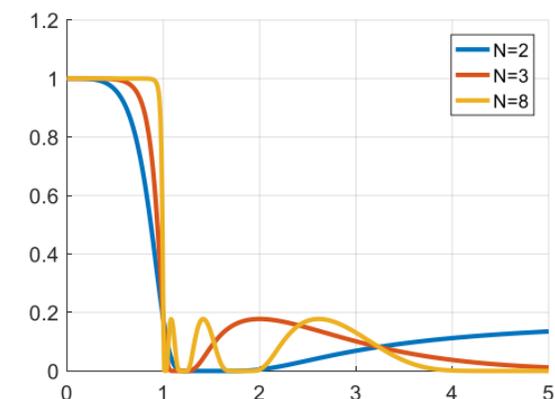
$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}$$

$$N \geq \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}\right)}{\operatorname{arccosh}(\omega_s/\omega_c)}$$

再由 $|H(j\omega)|^2$ 求极点 s_k 和系统函数 $H(s)$ (直接法、查表法)

18.3.3 切比雪夫 II 型滤波器

$$|H(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}$$



其中 $\frac{\omega_c}{\omega}$ 的变化可以理解为将切比雪夫 I 型关于 $x=1$ 进行了翻折, 而 $1-$ 又将得到的图像进行了 0 到 1 的上下翻折。得到了现在的图像。

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{0.1A_s} - 1}}$$

$$N \geq \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{10^{0.1A_p} - 1}}\right)}{\operatorname{arccosh}(\omega_c/\omega_p)}$$

再由 $|H(j\omega)|^2$ 求极点 s_k 和系统函数 $H(s)$ (直接法、查表法)

18.4 频率转换进行非低通滤波器的设计

低通-高通

对低通归一化频率 η 高通归一化频率 λ , 其转换关系为:

$$\eta\lambda = 1 \text{ 或 } \lambda = \frac{1}{\eta}$$

最终得到公式:

$$H_{HP}(s) = H_{LP}(p) \Big|_{p=\frac{\omega_p}{s}}$$

低通-带通

带通带阻主要以 ω_2 作为分界线, 进行比例关系推导:

$$\frac{\eta - \eta_2^2/\eta}{\eta_3 - \eta_1} = \frac{2\lambda}{2\lambda_p}$$

最终得到公式:

$$H_{BP}(s) = H_{LP}(p) \Big|_{p=\frac{s^2 + \omega_3\omega_1}{s(\omega_3 - \omega_1)}}$$

低通-带阻

$$\frac{\eta - \eta_2^2/\eta}{\eta_3 - \eta_1} = \frac{2\lambda_p}{2\lambda}$$

也可通过带通变换 + 高通变换进行处理。

最终得到公式:

$$H_{BS}(s) = H_{LP}(p) \Big|_{p=\frac{s(\omega_3 - \omega_1)}{s^2 + \omega_3\omega_1}}$$

18.5 重点 summary

理想滤波器的不可实现性

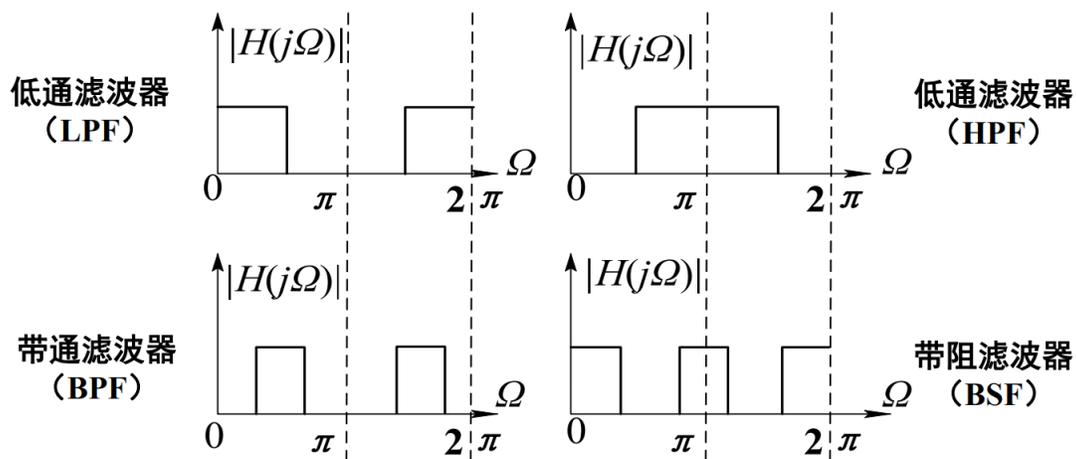
巴特沃斯系数求解与系统函数求解

19. 数字滤波器设计

与模拟滤波器不同，数字滤波器是一种离散时间 LTI 系统，输入输出均为数字信号，通过数字电路或软件改变输入信号所含频率成分的相对比例去除不需要的频率成分。

本讲知识略微单薄，不足以完全了解数字滤波器的设计方法。请读者自行查阅相关资料。

与模拟滤波器相同，其也可分为四类：



理想数字滤波器依旧存在不可实现性。

19.1 有限脉冲响应滤波器 (FIR)

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

且 a_i 至少有一项非零。

19.1.1 冲激响应不变法

步骤为：

- 设计模拟滤波器 $H(s)$
- 拉氏逆变换求冲激响应 $h_a(t)$
- 对 $h_a(t)$ 采样得 $h(n)$
- 对 $h(n)$ 进行 z 变换得到 $H(z)$

当设计好模拟滤波器 $H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s-p_i}$ 后，得到冲激响应为 $h_a(t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t)$ 。对其进行采样处理得到：

$$h(n) = h_a(t)|_{t=nT} = \sum_{i=1}^N K_i (e^{p_i T})^n u(n)$$

从而对其 z 变换就很容易能够写出来了：

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

优点

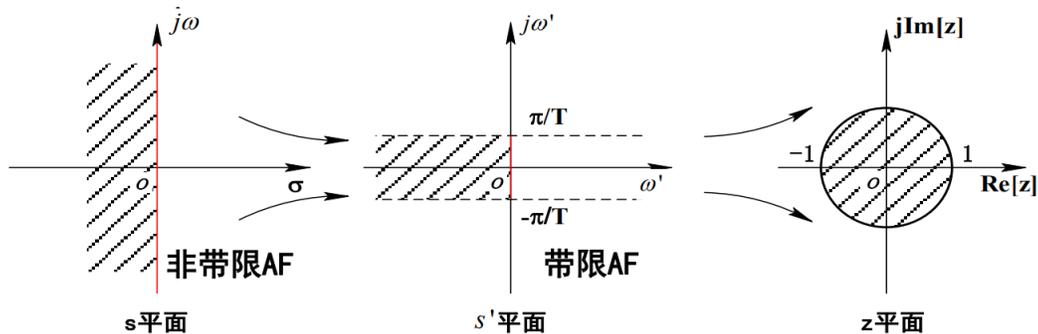
1. 数字滤波器单位样值响应完全模仿模拟滤波器冲激响应，时域逼近良好。
2. 频率特性基本与模拟滤波器相同。

缺点

会产生频率混叠，只适合低通或带通滤波器的设计。(为什么?)

19.1.2 双线性变换法

这种方法的特点在于压缩——先在复频域将非带限模拟滤波器映射（压缩）为最高角频率为 π/T 的带限滤波器，再完成 s 平面到 z 平面单值映射。有效的解决了混叠问题。



■ **Example 19.1** 为什么范围压缩后就能够解决混叠？换句话讲冲击响应不变法为什么会产生混叠？

■

压缩公式为:

$$\omega' = \frac{2}{T} \arctan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

观察这个公式, 首先其确实完成了我们的压缩目的, 将 ω 压缩到 $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ 。此外还有一特点, 在 ω 较小时, 公式变为 $\omega' = \omega$ 尽量保留了原始信息。

最终得到转换公式:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

优点

1. 实现了 s 平面到 z 平面的单值映射, 避免了“频率混叠效应”
2. 可适用于低通、高通、带通或带阻等各种类型数字滤波器的设计

缺点

模拟角频率 ω 与数字角频率 Ω 之间呈非线性关系, 只在零频率附近近似线性, 会产生失真。

19.2 无限脉冲响应滤波器 (IIR)

当 a_i 恒为 0 时:

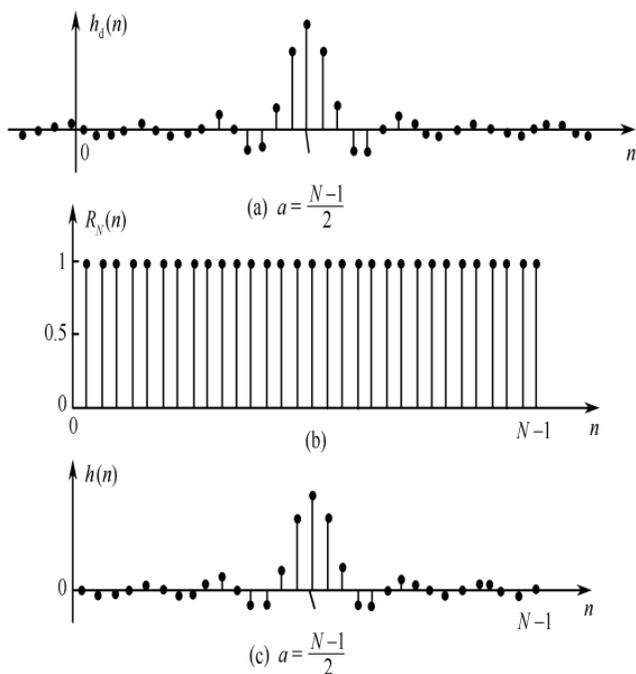
$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j}$$

除原点外在 z 平面上无极点, 无法借用模拟滤波器的设计方法。

19.2.1 窗函数法

从时域出发, 设计滤波器的 $h(n)$ 去逼近理想单位样值响应 $h_d(n)$, 从而使频响特性 $H(\Omega)$ 逼近理想频响 $H_d(\Omega)$ 。而 FIR 是从频域出发去逼近。

要得到有限长的 $h(n)$, 最简单的方法是用一长为 N 的矩形窗 $w(n) = R_N(n)$ 截断 $h_d(n)$ 。



若只用矩形窗会产生问题——吉布斯 (Gibbs) 效应。因此有如矩形窗、Bartlett 三角窗、Hamming 汉明窗等等窗函数来解决这个问题。

19.2.2 频率采样法

从频域出发，对理想频响 $H_d(\Omega)$ 进行等间隔采样，使得 FIR 滤波器频响特性在采样点 $\{\Omega_k = 2\pi k/N; k = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 处与 $H_d(\Omega)$ 相等，即 $H(\Omega) = H_d(\Omega)$ 。

19.3 重点 summary

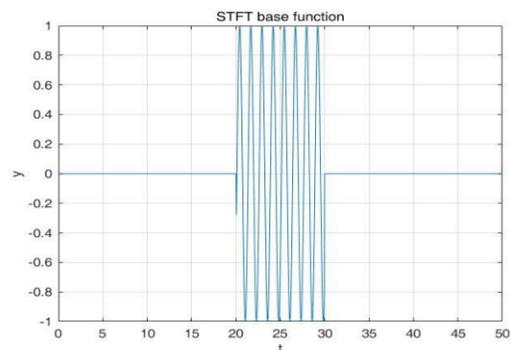
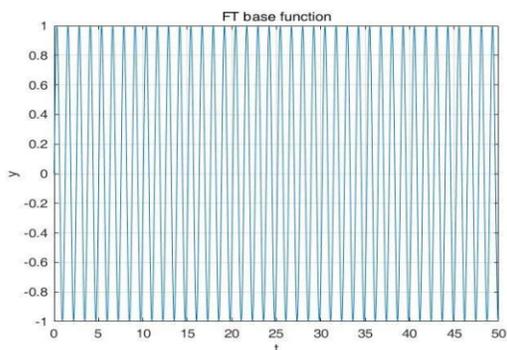
从模拟滤波器到数字滤波器的设计思想

20. 信号处理在音频与图像中的应用

将知识进一步应用到具体场景中——如音乐的匹配、图像的压缩等等。这一章仅当知识的延伸拓展，如果想进一步了解，可以去学习《数字信号处理》《数字图像处理》等等相关课程。此外信号在控制中也有广泛的应用，也可选修相关课程。

20.1 音频处理之短时傅里叶变换 (STFT)

对于一段音频，如果对其进行整体的频域分析的话，是无法反映信号频谱在时域上的变化情况的。因此我们的思路是**加窗分段**，通过对不同窗口的频域分析来反映出当前时间窗的频域特新——**时间窗引入了时间信息**。



难点：如何选择**窗的宽度**？对于该频率来说，其周期很短，也就代表需要较少的时间长度就能够对其进行辨别；相反，低频率则需要更长的时间来判别。因此再对处理音频不了解的情况下，加窗的原则要着重考虑。

20.2 图像处理之二维离散傅里叶变换 (2D DFT)

$$F(u, v) = \text{DFT}[f(x, y)] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

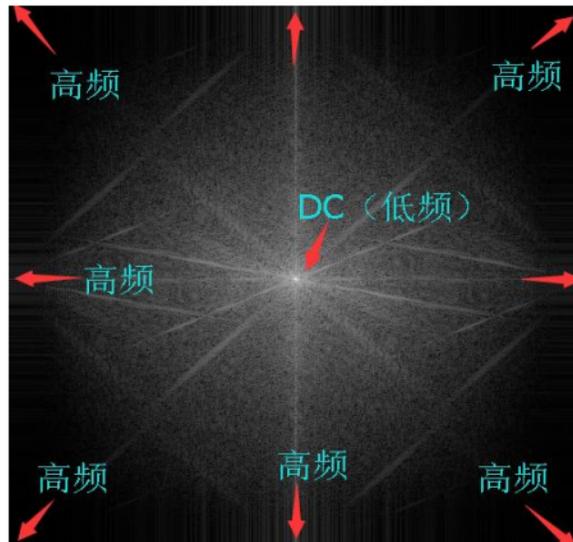
$$f(x, y) = \text{IDFT}[F(u, v)] = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

但是其复杂度非常高——对任意一个 $F(u, v)$ 都要有 $O(MN)$ 的复杂度。运用数学分析的知识，我们可以对求和符号进行分离，复杂度大大降低，变为 $O(M+N)$ 。

$$\begin{aligned} F(u, v) = \text{DFT}[f(x, y)] &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-ju\frac{2\pi}{M}x} e^{-jv\frac{2\pi}{N}y} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-ju\frac{2\pi}{M}x} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-jv\frac{2\pi}{N}y} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-ju\frac{2\pi}{M}x} F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} e^{-jv\frac{2\pi}{N}y} F(u, y) \end{aligned}$$

直接进行傅里叶变换后，**低频信息在角落**。为了能够更好的观察往往要进行以下操作：

1. `imshift`: 图像翻折，将低频信息翻折到中心。
 2. `abs`: 取绝对值。
 3. `log`: 减小整体的数值变换范围，使其能够正常的展示全局信息，利于人眼观察。
- 经过如上操作后我们能得到一副傅里叶频谱图：



■ **Example 20.1** 试用频域平移在时域上的性质特点证明：

用 $(-1)^{x+y}$ 乘以输入图像 $f(x,y)$ 也可进行中心变换，达到 `imshift` 的效果。

■

对于一张频谱图像，我们需要知道各部分代表了哪些信息：

- **直流分量**：表示图像的平均灰度 $F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = MN\bar{F}(u,v)$
- **低频分量**：代表了大面积背景区域和缓慢变化部分
- **高频分量**：代表了边缘、细节、跳跃部分及噪声
- **振幅**：描述了图像灰度的亮度
- **相位**：决定了图像灰度的位置信息

此外，傅里叶频谱是**中心对称的**，因此在对频域进行操作时，往往进行对称操作会使得效果更好。

同样二维图像也有**滤波器**：如高斯滤波器、巴特沃斯滤波器等等，其也会引申出**振铃效应**等诸多问题。这部分内容在《数字图像处理》这门课中有详细的介绍，在信号与系统中仅做拓展。

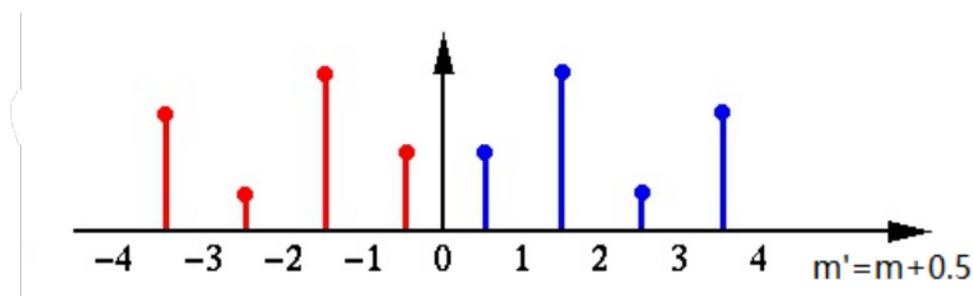
20.3 图像压缩之离散余弦变换 (DCT)

离散余弦变换的特点为其频域均是实数，不像 DFT 中的频域是复数，此外其频域的能量更加集中。

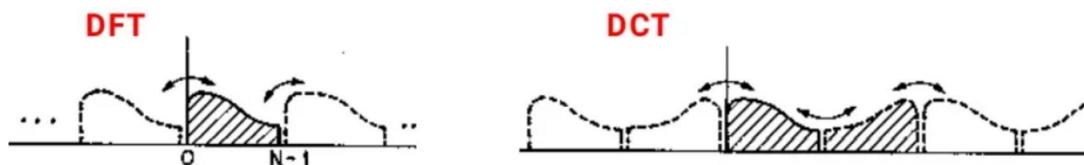
在最初的傅里叶变换中，我们提到过这样的性质：

- 若 $f(t)$ 为实偶函数，则 $F(\omega)$ 为实偶函数
- 若 $f(t)$ 为实奇函数，则 $F(\omega)$ 为虚奇函数

因此我们只要让 $f(t)$ 是偶函数，即可让频域在实数范围内。具体操作为：**将原信号（从 0 开始）向右频移 1/2 个单位，并做关于 y 轴的对称图像，得到的新函数便满足对称性。**从图中便能够清晰地理解：



考虑其与**周期延拓**的区别：周期延拓在拼接处不一定是“连续”的，而做对称在拼接处一定是“连续”的。



得到离散余弦变换的公式：

$$X(k) = 2 \sum_{m=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi}{N}k\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos\left(\frac{\pi}{N}k\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

注意正逆变换的积分因子是相同的： $\cos(\frac{\pi}{N}k(n + \frac{1}{2}))$ 。

而我们经常使用的 **JPEG 中的压缩部分变为 DCT 变换**，因为其**能量集中**——这也就代表我们能够再去掉更多影响不大的信息后依旧能大致保持原图的信息。当然 JPEG 的步骤很多，压缩知识其中一部分，感兴趣同学可以自行查阅，其中每一步都不是很困难，会涉及一些色彩空间的转换以及编码问题，整体压缩效果是很不错的。同样的，可以通过修《**数字图像处理**》来进一步学习。

总之以上提到的应用都是片面中的片面，其在生活中各个方面均有出现，只不过常见到我们已经忽略掉它们了。

20.4 重点 summary

短时傅里叶变换的核心思想
 二维傅里叶频谱的物理意义
 离散余弦变换的设计思想



笔者的一些想法

《信号与系统》这门课算是一门基础课，虽说不像《数学分析》《线性代数》等课程的基础性那么强，但是也是我们的有力工具，在音频图像视频处理以及控制理论中均发挥了重要作用。因此学好这门课是完全有必要的。

这本讲义实话讲内容并未设计很深，仅仅把一些较为重要的知识点列了出来，而更加深入的如“佩利维纳准则”、“劳斯判据”等等均未涉及；此外后期的滤波器设计也并没有进行很详细的讲解。因此这个讲义列出的都是我认为应**必会**内容。这里的“必会”并不代表全部背下来，我认为更重要的是**理解思想**——为什么要这样做。死知识可以网上检索，但是思路与举一反三的能力使我们应内化于心的。

在学习这门课时，希望大家多多探索，多多思考。当然其实每一门课都要这样。要知道，老师让我们看到的往往是**已非常完备，直指核心的例子**。而当我们自行尝试的时候往往会走上诸多弯路——能否从弯路中走上正道便要靠自己自己的思考——毕竟现实哪有那么多直路呢？举一个简单的例子，我们在算 $u(t)$ 傅里叶的时候用的是 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ ，那我们能不能用**单边指数的趋近法** ($\lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}, t \geq 0$) 来求解呢？当真正尝试的时候**大概率得不到正确结果**——因为我们自己的方法是有问题的，往往会忽略很多情况。这道题是**课后教材的 3-30**，如果你真的做了且没做出来可以去找答案看看思路。

实话讲，笔者这学期同时学了《微分方程》《数字电路》《数字图像处理》等多多少少与《信号与系统》相关联的课程。同一个知识点往往在多门课中出现，这或许也是让我较好掌握知识的一个原因。如果只修习《信号与系统》的话，希望大家能够**拿出一定时间去理解**，因为实话讲信号与系统的内容虽多但知识体系十分清晰——**连续与离散的对应关系、不同变换的相互关联**都是我们学习过程中的抓手。我尝试在每章的内容中与其他章节相联系，也是希望读者能够建立较为周密的知识网络。**最后，希望大家有所收获！**



====Ending====

Edited by 黄奕

Thanks for reading
Wish you have a harvest